20pXL-11

多業種にわたる債券の同時デフォルト分布関数と比較

北里大理[A]、S& P[B] 慶大政策[C]　守真太郎[A]、久門正人[B]、橘川研史[C]

Correlated Binomial Default Distribution for Inhomogeneous Portfolio

Kitasato Univ, S& P, Keio Univ.

Shintaro Mori, Masato Hisakado, Kenji Kitsukawa

デフォルト相関のある債券の確率模型は、大きく分けて2種類ある。ひとつは、デフォルトするかしないかを、2値変数で記述し、同時分布関数を与えるもの。例えば、2項分布(相関ゼロ)や2項展開法、Moody'sの相関のある2状態模型、イジング模型など。こうした模型では、パラメータとしてデフォルト確率 P_d、デフォルト相関 ρ_d が用いられる。もうひとつは、債券の基礎となる企業などの収益率の確率模型と、その収益率がある閾値を割ったときデフォルトしたと判定するものである。たとえば、ファクター模型、コピュラ模型、クレジットメトリックス模型、デフォルト強度模型などである。この模型では、デフォルト確率と、多数の債券の状態変化の相関を記述するアセット相関 ρ_a をパラメータとして用いている。

こうした確率模型は、前者は理論的にシンプルで扱いやすいが、表現力に乏しいと言う欠点があり、後者は表現力に優れていても、そのパラメータ決定が難しく、また、数値的に解析するしかないという欠点がある。そのため、オプションにおける「ブラックーショールズ公式」のような決定版とも言える評価式は存在しない。本講演では、こうした確率模型(とくにイジング、Moody'sのモデル、ファクター模型)での、デフォルト相関の効果の違いについて解説した後、Moody'sの研究者により提案された、相関のある2状態模型を、多業種に拡張した結果について述べる。

業種数が2の場合は次の通りである。業種1の債券の状態を表す変数を $x_i(i=1,\cdots,N_1)$、業種2の債券の状態を表す変数を $y_j(j=1,\cdots,N_2)$ とし、それぞれのデフォルト確率を $<x_i>=P_x,<y_j>=P_y$ とする。各セクター内での相関は、ρ_x,ρ_y、セクター間の相関は ρ_{xy} とする。同時分布関数に次の条件を課す $\mathrm{Cor}(x_{i+1},X_{i+2}|\prod_{k=1}^{i}x_k=1)=\rho_x$, $\mathrm{Cor}(y_{j+1},y_{j+2}|\prod_{l=1}^{j}y_l=1)=\rho_y$。また、セクター間の相関に、

$$\mathrm{Cor}(x_{i+1},y_{j+1}|\prod_{k=1}^{i}x_k\prod_{l=1}^{j}y_l=1)=\rho_{xy}$$

の条件を課す。すると、次の条件付き期待値 $P_{ij}=<x_i|\prod_{k=1}^{i-1}x_k\prod_{l=1}^{j-1}y_l=1>$,$q_{ij}=<y_j|\prod_{k=1}^{i-1}x_k\prod_{l=1}^{j-1}y_l=1>$ に対して次の漸化式が得られる。

$$p_{i0}=1-(1-P_x)(1-\rho_x)^i \quad q_{0j}=1-(1-P_y)(1-\rho_y)^j$$

$$p_{ij+1}=p_{ij}+\frac{1}{q_{ij}}\sqrt{p_{ij}(1-P_{ij})q_{ij}(1-q_{ij})}\times\rho_{xy} \quad q_{i+1}=q_{ij}+\frac{1}{p_{ij}}\sqrt{p_{ij}(1-P_{ij})q_{ij}(1-q_{ij})}\times\rho_{xy}$$

これらの条件付き期待値を用いて、損失分布関数を求めることも出来る。