クレジットリスクの確率モデルの比較

守 真太郎、久門正人 ^{A}、橘川研史 ^{B}
北里大 理学部 物理学科、S&P^A、慶應大学大学院 政策メディア研究科 ^{B}

概 要

信用リスクのある債権の確率模型として、２値の状態変数で債権のデフォルト、ノンデフォルトの状態を記述する「ムーディーズの相関のある２項分布模型」、「イジング模型」を取り上げる。これらのモデルのデフォルト数分布関数のデフォルト相関依存性は全く異なる。ムーディーズの場合は相関が大きくなると、分布の裾が広がるのに対し、イジングでは分布は２個のピークを持ち、全債権がデフォルトする確率を表す２個目のピークがデフォルト相関の大部分を担っている。この振る舞い違いを条件付きデフォルト確率の振る舞いから理解できることを解説する。また、債権が多数の業種に渡る場合への確率模型の拡張方法と、どのような場合に拡張が可能なのかについても議論する。

Comparison of Correlated Binomial Default Distributions

S.Mori,Department of Physics, School of Science, Kitasato University
M.Hisakado, Standard & Poors
K.Kitsukawa, Graduate School of Meida and Gavanance, Keio University

Abstract

We compare two binomial default distributions for homogeneous credit portfolios, Moody's correlated binominal default distribution and long-range Ising model. The behaviors of their default distribution functions are completely different. We explain the difference by estimating the conditional default probabilities. In addition, we introduce correlated binomial default distribution for inhomogeneous credit portfolios based on the Moody's default distribution. The limitation on the range of the correlation between the assets in different sectors, is discussed.

1 デフォルト相関とは

デフォルトとは、債務者が支払い義務を履行しないことを意味し、クレジットリスク、デフォルトリスクとは、そのリスクのことである。近年、クレジットリスクをベースにした金融商品 (クレジットデリバティブ) が金融工学においてホットなトピックスとなっている [1, 2]。特に、CDO などのクレジットリスクのある多数の債権を証券化し、プライシング、格付けを行うには、債権のデフォルト数分布関数を評価することが必要であり、さまざまな確率模型が提案されてきた。そのなかでも、債権の状態をデフォルト状態、ノンデフォルト状態の２状態で記述し (デフォルトモード模型)、多数の債権のデフォルトの同時分布を明示的に与えるモデルである、ムーディーズの相関のある２項分布模型 (Moody's Correlated Binomial default distribution、以下 MCB 模型と略す) [3] とイジングの平均場模型 (以下、イジング模型と略す) [4, 5] を取り上げる。それらのデフォルト数分布関数の違いを条件付きデフォルト確率の差として理解する。後半では、こうしたデフォルトモード模型を実務に応用する際に必要となる非一様なポートフォリオの問題を扱う。債権が多業種に渡り、相関が同業種内と業種間で異なる場合のデフォルト同時分布関数の構成方法について解説する。

2　デフォルトモード模型としてのイジング模型と MCB 模型

デフォルト確率 p_d、デフォルト相関 ρ_d の N 個の債権からなる一様なポートフォリオがあったとする。イジング模型では、債権の状態をイジングスピン変数 S で表し、$S=1$ がノンデフォルト、$S=-1$ がデフォルト状態を示すものとする。便宜的に $k_BT=1$ とし、交換相互作用の強さを $\frac{J}{N}$、外場の強さを H とすると、$S_1,S_2,\cdots,S_N$ の従う同時分布関数は

$$P(S_1,S_2,\cdots,S_N)=\frac{1}{Z_N(J,H)}\exp\left(\frac{J}{2N}\sum_{1\le i,j\le N}S_iS_j+H\sum_{i=1}^{N}S_i\right). \tag{1}$$

また、デフォルト数 N_d の分布関数 $P(N_d)$ は

$$P(N_d)=\frac{\exp\left(\frac{J}{2N}N^2+HN\right)}{Z_N(J,H)}{}_NC_{N_d}\exp\left(\frac{2J}{N}N_d^2-(2J+2H)N_d\right). \tag{2}$$

となる。イジング模型の場合、モデルパラメータは J,H であり、デフォルト確率、デフォルト相関は明示的には与えられない。我々は、イジング模型が (J,H) 空間のどの領域で相関を持ち、クレジットリスクのモデルに対応するのかを調べた [5]。その結論は、平均場の自己無撞着の式 $m=\tanh(Jm+H)$ が３個の解 (1 個は不安定、2 個は安定) を持つ領域で、かつ外場 H の強さが $O(\frac{1}{N})$ とシステムサイズに逆比例する場所が相関がゼロでない値を持つことを解明した。つまり、$N\to\infty$ の熱力学極限でも２個のピークを持ち、かつそれらの確率が異なる（Z_2 対称性のない）場合がクレジットリスクでのパラメータの値（p_d,ρ_d はせいぜい数パーセントで、ほとんどのスピンは $S=1$ をとる）を再現できる。また、分布関数（2）を、２ピークに対応した２個の２項分布の重ね合わせとそれからの摂動展開と捉え、モデルパラメータ J,H と p_d,ρ_d の間の精度がよい近似的な関係式を求めることに成功した。

一方、デフォルト相関 ρ_d と共に、デフォルト数 N_d の分布関数 $P(N_d)$ がどう変化していくかについては、$\rho_d=0$ の２項分布から出発し、ρ_d が値を持ち始めるとすぐに $N_d=N$ の近傍に第２のピークが出現し、ρ_d の増加と共に第１のピークは原点側にシフトし、第２のピークが p_d まで大きくなることが分かった。つまり、イジング模型は、p_d が小さい (ほとんどのスピンが上を向いている) 場合、２項分布的に振る舞う第１のピークと、全てがデフォルトする事象に対応した $N_d=N$ での第２のピークの重ね合わせと近似的に表現できることが分かる。第２のピークの確率を α、分布関数を $\alpha\delta_{N,N_d}$ で表し、確率が $1-\alpha$ の第１のピークが表す２項分布を $B(N_d,p)$ とする。すると、デフォルト数分布関数は次の式で与えられることになる。

$$P(N_d)=(1-\alpha)_NC_{N_d}p^{N_d}(1-p)^{N-N_d}+\alpha\delta_{N,N_d} \tag{3}$$

ここで、第１項に $1-\alpha$ が掛かっているのは、$P(N_d)$ の N_d に関する和が１になるためである。デフォルト確率 p_d、デフォルト相関 ρ_d は次の式で与えられる。

$$p_d=\alpha+(1-\alpha)\times p \qquad\qquad \rho_d=\frac{(1-\alpha)p^2+\alpha-p_d^2}{p_d(1-p_d)} \tag{4}$$

この確率分布に従う模型を、２項分布にプラスしたという意味で B^+ 模型と呼ぶことにする。この分布は、α がゼロでは、相関がゼロ、$p=p_d$ の２項分布だが、α が最大 p_d まで増加すると共に、$N_d=N$ での第２のピークが大きくなり、第１のピークは、$p=\frac{p_d-\alpha}{1-\alpha}$ で p が小さくなるので、原点側にシフトする。そして、$\alpha=p_d$ において、$N_d=0$ と $N_d=N$ のみが確率を持ち、前者の確率が $1-p_d$、後者の確率が p_d となる。

一方、MCB 模型 [3] では、各アセットの状態を確率変数 X で表し、$X=1$ がデフォルト状態、$X=0$ がノンデフォルト状態に対応するとする。N 個の確率変数の従う同時分布関数 $P(x_1,x_2,\cdots,x_N)=P(X_1=$

$x_1, X_2 = x_2, \cdots, X_N = x_N)$ を一意に決定するには、状態の数が 2^N、確率の和が 1 であることを考慮すると $2^N - 1$ 個の条件が必要となる。一様なポートフォリオの場合は、この数は減少し、N 個の債権の内どの $n(\leq N)$ 個がデフォルトしても確率は同じなので、$n = 0$ から $n = N$ までの場合の数 $N + 1$ に対応して、自由度は $N + 1$ 個あることになる。規格化の条件を考慮すると、N 個の条件を同時分布関数に課せば、一意に決定できることが分かる。MCB 模型では、p_i という条件付き期待値を用いて、以下の条件を課すことにより、同時分布関数を定める。まず、p_i は、N 個の債権のうち、任意の i 個がデフォルトしている条件下で、残り $N - i$ 個のうちの任意の 1 個のデフォルト確率として定義される。期待値を用いて表すと、

$$p_i =< X_{i+1}| \prod_{i'=1}^{i} X_{i'} = 1 > \tag{5}$$

となる。ここで、確率変数 Y の期待値を一般に $< Y >$ と書くこととし、また期待値について課す条件を縦棒 $|$ の右側に示した。$X = 1$ でデフォルト、$X = 0$ でノンデフォルトとしたので、X の期待値は $X = 1$ の確率を表すことに注意してほしい。すると、デフォルト確率 p_d は p_0 と等しくなることが分かる。これが第 1 の条件である。

$$p_0 = p_d$$

次に、i 個の債権がデフォルトしている条件下で、残り $N - i$ 個の任意の 2 個の債権のデフォルト相関が ρ_d であるとする。確率変数 X, Y の相関を Cor(X,Y) と書くことにすると、この条件は次のように書くことができる。

$$\text{Cor}(X_{i+1}X_{i+2}| \prod_{i'=1}^{i} X_{i'} = 1) = \rho_d$$

$\text{Cor}(X, Y) = (< XY > - < X >< Y >)/(\sqrt{< X > (1- < X >) < Y > (1- < Y >)})$ という相関の定義から、次の漸化式を導くことができる。

$$p_{i+1} = p_i + \rho_x(1 - p_i) \tag{6}$$

この漸化式は解くことが出来、次のようになる。

$$p_i = 1 - (1 - p_d)(1 - \rho_d)^i$$

これらの条件付き期待値を用いて、N 個の債権の状態 $\vec{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_N)$ の同時分布関数は次の式で与えられる。

$$P(\vec{x}) = P(x_1, x_2, \cdots, x_N) =< \prod_{i=1}^{N} X_i^{x_i}(1 - X_i)^{1-x_i} > \tag{7}$$

この式は、次の期待値計算の式変形から確率の和が 1 になることが保証されていることが分かる。

$$1 =< 1 >=< \prod_{i=1}^{N}\{X_i + (1 - X_i)\} >= \prod_{i=1}^{N}[\sum_{x_i=0}^{1}] < \prod_{i=1}^{N} X_i^{x_i}(1 - X_i)^{1-x_i} > \tag{8}$$

また、N 個の債権のうち、n 件デフォルトする同時分布関数の値は

$$P_X(n) = P(1, 1, \cdots, 1, 0, \cdots, 0) =< \prod_{i=1}^{n} X_i \prod_{i=n+1}^{N} (1 - X_i) >= \sum_{k=0}^{N-n} {}_{N-n}C_k(-1)^k(\prod_{i'=0}^{n+k-1} p_{i'}) \tag{9}$$

で与えられる。

3　デフォルト数分布関数の相関依存性とその解釈

前節の結果をもとに、イジング模型と MCB 模型のデフォルト数 N_d の分布関数 $P(N_d)$ をプロットしたのが次の図 1 である。

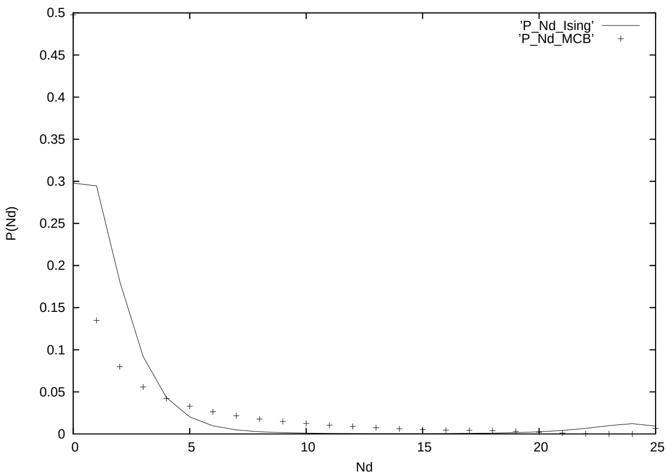

図 1: イジング模型と MCB 模型のデフォルト数分布関数。デフォルト確率は 10％、デフォルト相関は 30％、２５個の債権からなるポートフォリオ。イジング模型の結果は実線で、MCB 模型の結果は+印で示した。MCB 模型の $N_d = 0$ での値は約 0.5 である。

同じデフォルト確率、相関を持っていても、デフォルト数分布関数 $P(N_d)$ は異なることが分かる。MCB 模型の分布関数は、相関のない通常の２項分布が $N_d = N \times p_d = 2.5$ 前後にピークを持つのに対して、$N_d = 0$ が確率最大となる。また、ピークの位置は原点に来ても、確率分布の裾は広く、$N_d = N$ の近くでもゼロとはならない。一方、イジング模型の分布関数は、２個のピークを持つ。一つ目のピークは MCB 模型と同様に原点にあるが、MCB 模型に比べ高さは低く、また急激に減少する。２個目のピークは $N_d = N$ の近くにあり、図の場合、２個目のピークの確率は約３％である。

こうした分布関数の違いは、MCB 模型で導入された条件付きデフォルト確率 p_i の i 依存性から理解できる。p_i は i 個の債権がデフォルトした条件下での債権のデフォルト確率を意味していて、MCB 模型では漸化式（6）に従って i と共に増加していく。

イジング模型の場合、条件付きデフォルト確率の計算は容易ではない。そこで、イジングの模型の近似模型である B^+ 模型の条件付き期待値を評価した。結果は、

$$p_i = \frac{(1-\alpha)p^{i+1} + \alpha}{(1-\alpha)p^i + \alpha} \tag{10}$$

である。確率 p_i は、i が大きくなると、p^{i+1}, p^i が急速にゼロとなり、１に近付いて行く。図 2 に、p_i が i と共に増加する様子を表した。２本の実線があるが、上側の実線がイジング模型、下側の実線が MCB 模型のデータである。$i = 0$ では、共に $p_0 = p_d$、$i = 1$ では、$p_1 = p_d + \rho_d(1 - p_d)$ となり、実線は重なっている。$i \geq 2$ に対しては、イジングの p_i が急速に 1 になるのに対して、MCB 模型の p_i はそれと比較するとゆっくりと 1 に接近していることが分かる。

この条件付き確率 p_i の i 依存性から、$P(N_d)$ の振る舞いの差を理解することが出来る。MCB 模型では、p_i の増加がゆっくりなため、小規模のデフォルト連鎖の確率が大きい。一方、イジング模型では、$i = 3$ 程度でも $p_i \simeq 1$ となり、3 件デフォルトが起きれば、全ての債権がデフォルトすることを意味する。そのため、倒産が起きるときは大規模な倒産が必ず起き、雪崩の規模はシステムサイズにほぼ等しく、分布関数 $P(N_d)$ は $N_d \simeq N$ にピークを持つようになる。

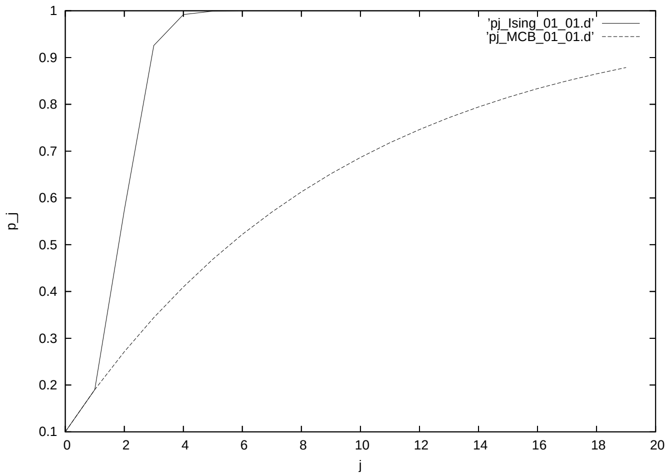

図 2: イジング模型の近似である B^+ 模型と MCB 模型の p_i をプロットした。デフォルト確率、相関は共には 10 %とした。

4 $N+1$ への拡張

次に、MCB 模型の拡張を考える。その手始めに、$X_1, X_2, \cdots, X_N$ とは別の確率変数 $Y=0,1$ を導入し、その期待値を $<Y>=p_y$、Y と X_i の相関が ρ_{xy} の場合を考える。もちろん、$p_y=p_d, \rho_{xy}=\rho_d$ の場合、元々の MCB 模型で変数の数が 1 増えただけに対応する。次の条件付き期待値を導入する。

$$p_{i,0} =< X_{i+1}| \prod_{i'=1}^{i} X_{i'} = 1 > \quad p_{i,1} =< X_{i+1}| \prod_{i'=1}^{i} X_{i'} \times Y = 1 > \quad q_i =< Y| \prod_{i'=1}^{i} X_{i'} = 1 >$$

$N+1$ 変数の場合、必要な条件の数は $p_{i,0}, p_{i,1}$ に対して $2N$ 個、q_i に対して $N+1$ 個である。条件の課し方には２通りあるが、拡張が容易で、また、相関 ρ_{xy} をより大きくできるのは、次の場合である。

$$\mathrm{Cor}(X_{i+1}X_{i+2}| \prod_{i'=1}^{i} X_{i'} = 1) = \rho_d \exp(-i\lambda) \tag{11}$$

$$\mathrm{Cor}(X_{i+1}Y| \prod_{i'=1}^{i} X_{i'} = 1) = \rho_{xy} \exp(-i\lambda) \tag{12}$$

ここで、オリジナルの MCB 模型に対して、相関が i と共に $\exp(-i\lambda)$ と弱くなるように修正を行った。この修正は、X_i と Y の相関 ρ_{xy} を強くするために必要な条件であることを後に解説する。また、従来の N 変数の場合で、この修正を行っても、デフォルト数分布の形はほとんど変化しないも追記しておく。以上の条件から、条件付きデフォルト確率 $p_{i,0}, p_{i,1}, q_i$ について次の関係式を得る。

$$p_{i+1,0} = p_{i,0} + \rho_d \exp(-i\lambda)(1-p_{i,0}) \qquad p_{0,0} = p_d \tag{13}$$

$$p_{i,1}q_i = q_{i+1}p_{i,0} = p_{i,0}q_i + \rho_{xy} \exp(-i\lambda)\sqrt{p_{i,0}(1-p_{i,0})q_i(1-q_i)} \qquad q_0 = p_y \tag{14}$$

これらの条件から、条件付き期待値が定まり、同時分布関数 $P(\vec{x}, y) = P(x_1, x_2, \cdots, x_N, y)$ も、次の式を分解し、条件付き期待値で計算することが出来る。

$$P(x_1, x_2, \cdots, x_N, y) =< \prod_{i=1}^{N} X_i^{x_i}(1-X_i)^{1-x_i} Y^y (1-Y)^{1-y} > \tag{15}$$

では、任意の相関 ρ_{xy} に設定して、確率分布が正しく得られるかと言うと、そうではない。まず、条件付きデフォルト確率は 1 より小さいことが必要である。また、同時分布関数の任意の成分も正かつ 1 以下でなくてはならない。これらの条件を満たす ρ_{xy}, p_y の値は、p_d, ρ_d そしてシステムサイズ N にも依存し、簡単な形で表すことは難しい。そこで、数値的に「あらゆる確率が 1 以下」を満たすかどうかを、様々なパラメータで調べてみた。

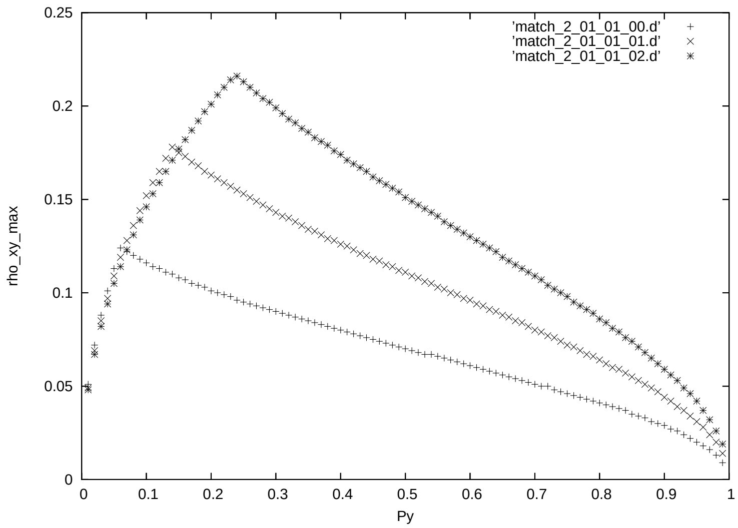

図 3: 確率分布が負にならないパラメータの領域を示した。$N = 30, p_d = \rho_d = 0.1$ に設定してある。$+$ 印のデータが $\lambda = 0.0$、$\times$ 印のデータが $\lambda = 0.1$、$*$ 印のラインが $\lambda = 0.2$ のデータを示している。

$N = 30$ とし、$p_d = \rho_d = 0.1$ の場合に、パラメータとして選べる領域をプロットしたのが、次の図 3 である。3 本のラインは下から、$\lambda = 0.0, 0.1, 0.2$ に対応していて、ラインの下側が ρ_{xy} の値として許される領域を示している。相関をダンプさせるパラメータ λ が大きいほど、ρ_{xy} のレンジが大きくなっていることが分かる。

相関をダンプさせると、ρ_{xy} として大きな値がとれる理由は、図 2 に示した p_i の振る舞いから理解できる。ダンプしない場合、p_i は十分大きな i に対して 1 となる。$N+1$ の場合は、$p_{i,0} = p_i$ なので、$p_{i,0}$ が 1 に近付く。そのため、式 (14) を用いて $p_{i,1}, q_i$ を決めるときに、ρ_{xy} を大きく選ぶと、1 を越えてしまうからである。一方、ダンプする場合は、$p_{i,0}$ は 1 に近付かず、ρ_{xy} として選べる範囲が大きくなる。

5 マルチセクターへの拡張

次にマルチセクター (多業種) の場合への拡張を考える。セクター数が複数の場合、セクター内の相関とセクター間の相関は大きさが異なり、一般に前者のほうが後者よりも大きい。これは、セクター間の相関が景気ファクターからくるのに対し、セクター内はセクター固有の事情 (系列、資本関係など) に起因するからである。例えば、１９８１年から２００３年までの S&P のデータ [6] では、1 年のデフォルトの業種内相関は平均で 2.3 パーセント、業種間は 0.6 パーセントとなっている。5 年でも、業種内は 4.7 パーセント、業種間は 1.9 パーセントである。そこで、セクターの数が K で、k 番目の業種のデフォルト確率を p_k、業種内デフォルト相関を ρ_k とし、i 番目と j 番目の業種間の相関を ρ_{ij} とした場合のデフォルトの同時分布関数を構成する。k 番目のセクターの n_k 番目の債権の状態を確率変数 $X^k_{n_k}$ で表すことにする。

構成方法は、図 4 で模式的に示したように、まず、債権の状態を表す変数 $X^k_{n_k}$ とは別に、確率変数 $Y = 0, 1$ を導入し、その確率分布は $P(Y = 1) = p_y$ とする。そして、前節の方法に従って、k 番目のセク

ターと相関 ρ_{ky} を持つ N_k+1 変数の確率分布 $P(x_1^k,\cdots,x_{N_k}^k,y)$ を構成する。その際、他のセクターの確率変数との依存性は無視し、また、条件付きデフォルト確率を次の記号で表すことにする。

$$p^i_{n_i,0} =< X^i_{n_i+1} | \prod_{i'=1}^{n_i} X^i_{i'} = 1 > \qquad p^i_{n_i,1} =< X_{n_i+1} | \prod_{i'=1}^{n_i} X^i_{i'} \times Y = 1 >$$

次の関係式を用いて、条件付き確率分布 $P(x_1^k,x_2^k,\cdots,x_{N_k}^k|y)$ を求める。

$$P(x_1^k,x_2^k,\cdots,x_{N_k}^k,y) = P(x_1^k,x_2^k,\cdots,x_{N_k}^k|y)P(y) \tag{16}$$

マルチセクターの場合の同時分布は次の式で構成する。

$$P(\vec{x}^1,\vec{x}^2,\cdots,\vec{x}^K) = \sum_{y=0,1} p(y) \times \prod_{k=1}^{K} P(x_1^k,x_2^k,\cdots,x_{N_k}^k|y) \tag{17}$$

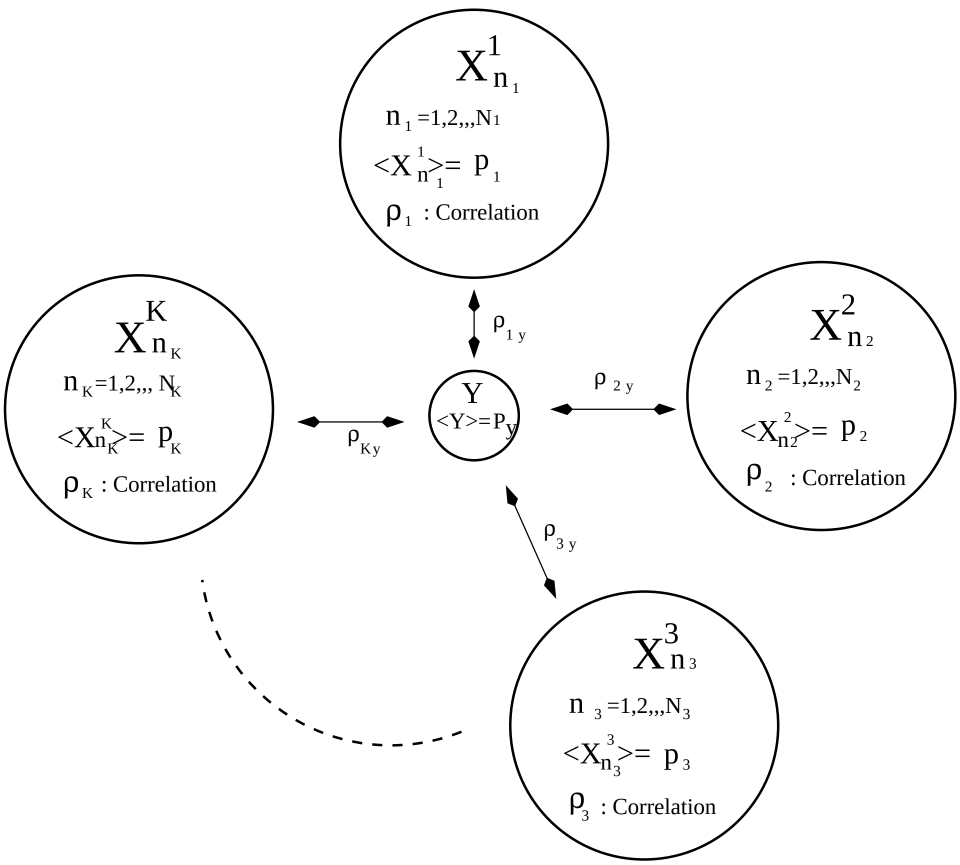

図 4: マルチセクターの場合のデフォルト同時分布関数の構成方法

この同時分布関数を用いて、セクター間の相関を計算すると次の関係式が得られる。

$$\rho_{ij} = \rho_{iy} \times \rho_{jy}. \tag{18}$$

さらに一般に、次の関係式が成立していることが分かる。

$$\mathrm{Cor}(X^i_{n_i+1}, X^j_{n_j+1} | \prod_{i'=1}^{n_i} X^i_{i'} \prod_{j'=1}^{n_j} X^j_{j'} = 1) = \rho_{ij} \exp(-(n_i+n_j)\lambda) \tag{19}$$

この式の証明には、相関の定義から、次の積の期待値が必要になる。

$$< X^i_{n_i+1} X^j_{n_j+1} | \prod_{i'=1}^{n_i} X^i_{i'} \prod_{j'=1}^{n_j} X^j_{j'} = 1 > \tag{20}$$

$X^i_{n_i+1}, X^j_{n_j+1}$ は、確率変数 Y を通して相互に依存している。期待値の計算は次のように $Y=0$ と $Y=1$ の場合の積の値の平均により行う。

$$\begin{aligned}
&< X^i_{n_i+1} X^j_{n_j+1} | \prod_{i'=1}^{n_i} X^i_{i'} \prod_{j'=1}^{n_j} X^j_{j'} = 1 > \\
&=< X^i_{n_i+1} | \prod_{i'=1}^{n_i} X^i_{i'} = 1, Y=1 >< X^j_{n_j+1} | \prod_{j'=1}^{n_j} X^j_{j'} = 1, Y=1 > p_y \\
&+ < X^i_{n_i+1} | \prod_{i'=1}^{n_i} X^i_{i'} = 1, Y=0 >< X^j_{n_j+1} | \prod_{j'=1}^{n_j} X^j_{j'} = 1, Y=0 > (1-p_y) \\
&= p^i_{n_i,1} p^j_{n_j,1} p_y + \tilde{p}^i_{n_i,0} \tilde{p}^j_{n_j,0} (1-p_y)
\end{aligned} \tag{21}$$

ここで、$Y=0$ での $X^i_{n_i+1}$ の条件付き期待値を $\tilde{p}^i_{n_i,0}$ と表した。$p^i_{n_i,0}$ と $\tilde{p}^i_{n_i,0}$ の間には、

$$p^i_{n_i,0} = p^i_{n_i,1} p_y + \tilde{p}^i_{n_i,0} (1-p_y) \tag{22}$$

という関係が成立する。また、Y との相関の式から、

$$p^i_{n_i,1} p_y = p_{i,0} p_y + \rho_{xy} \sqrt{p_{i,0}(1-p_{i,0}) p_y (1-p_y)} \tag{23}$$

となる。これらの関係式を代入して、

$$\begin{aligned}
&< X^i_{n_i+1} X^j_{n_j+1} | \textstyle\prod_{i'=1}^{n_i} X^i_{i'} \prod_{j'=1}^{n_j} X^j_{j'} = 1 > \\
&= p^i_{n_i,0} p^j_{n_j,0} + \rho_{iy} \times \rho_{jy} \sqrt{p^i_{n_i,0}(1-p^i_{n_i,0}) p^j_{n_j,0} (1-p^j_{n_j,0})}
\end{aligned} \tag{24}$$

が成立することが証明できる。この式から、セクター間の相関の式 (19) が証明できる。

以上、クレジットリスクの確率模型の比較、MCB 模型の多業種への拡張を行った。

参考文献

[1] Schonbucher P J 2003 *Credit Derivatives Pricing Models : Model, Pricing and Implementation* (U.S. John Wiley & Sons) .

[2] Bouchaud J-P and Potters M 2000 *Theory of Financial Risks*(Cambridge University Press).

[3] Witt G 2004 Moody's Correlated Binomial Default Distribution (Moody's Investors Service)**August 10**.

[4] Molins J and Vives E 2004 Long range Ising Model for credit risk modeling in homogeneous portfolios *Preprint* cond-mat/0401378.

[5] Kitsukawa K, Mori S and Hisakado M 2005 Evaluation of Tranche in Securitization and Long-range Ising Model *preprint*.

[6] Jobst N J and de Servigny A 2005 Working Paper (Standard & Poor's)