7aAY-3　二値確率過程のスケーリング解析と情報カスケード相転移の普遍類

北里大理, 金融庁 [1]　　守 真太郎, 久門 正人 [1]

Universality classes of information cascade phase transitions

Kitasato Univ.,F.S.A.[1]　　S. Mori, M. Hisakado[1]

二値の確率過程 $X(t) \in \{0,1\}, t \in \{1,2,\cdots,T\}$ を考える。$X(t+1)$ は、独立的な確率変数と過去の履歴に依存する確率変数の混合とし、それぞれの比率を $1-p:p$ とする。前者は確率 q で 1、後者は直近 r 個（相互作用のレンジを表す）の変数のうちの１をとった変数の比率 $z(t,r)$ に依存して、確率 $f(z(t,r))$ で１をとるものとする。関数 $f(z)$ として、(i) デジタル $[f(z)=\theta(z-1/2)]$、および (ii) アナログ $[f(z)=z]$、の二つのタイプを考える。これらの確率過程は $r\to\infty$ の極限でさまざまな相転移をする。(i) アナログの場合、$p=1/2$ を臨界点 p_s として、$p>p_s$ ではスーパー拡散相で、$z(t)=\sum_{s=1}^{t}X(s)/t$ の分散が $\mathrm{V}(z(t))\propto t^{2p-2}$ で、$p<p_s$ ではノーマル拡散相で $\mathrm{V}(z(t))\propto t^{-1}$ と振る舞う [3]。(ii) のデジタルでは $p_c=1-1/2q$ を臨界点とし、$p>p_c$ では Two-peak 相で $z(t)$ は、$z_{\pm}=(1-p)q\pm p$ のどちらかに収束し、$p<p_c$ では z_+ に収束する [2]。後者の相転移を情報カスケード相転移と呼ぶ。こうした相転移を統一的な観点から理解するため、相関関数 $C(t)\equiv \mathrm{Cov}(X(1),X(t+1))$ に対して相関時間 ξ を導入し、緩和時間 τ、相関時間 ξ のスケーリングでの普遍関数を厳密に求めた。そして、情報カスケード相転移の普遍性を分類した。その結果（臨界指数）をまとめたものが以下の表である [1]。

表 1: 情報カスケード相転移の臨界指数一覧. アナログ（デジタル）モデルで、相互作用のレンジが r のとき、$A^r(D^r)$ とし、それらの $r\to\infty$ の極限を $A^\infty(D^\infty)$ とする。

Model	p_c	β	α	$\nu_{\|\|}$	ν_τ	Z	γ_z
A^r	1	0	0	1	1	1	0
D^r	1	0	0	$(r+1)/2$	$(r+1)/2$	1	0
A^∞	1	0	0	NA	NA	1	0
$D^\infty, q>1/2$	1-1/2q	1	1/2	2	1	4/3	1/2

ここで、α は、p_c での $C(t)\propto t^{-\alpha}$ から、β は秩序変数 $c=\lim_{t\to\infty}C(t)/C(0)$ に対し、$c\propto(p-p_c)^\beta$ で、$\nu_{||},\nu_\tau$ は、ξ,τ の臨界指数 $\xi\propto|p-p_c|^{-\nu_{||}}, \tau\propto|p-p_c|^{\nu_\tau}$、$Z$ は動的臨界指数,γ_Z は臨界点での収束の指数として $V(z(t))\propto t^{-\gamma_Z}$ で定義する。

1. S.Mori and M. Hisakado, preprint, arXiv:1404.4921.
2. M. Hisakado and S.Mori, J.Phys.A,Math.Theor.44(2011)275204
3. M. Hisakado and S.Mori, J.Phys.A,Math.Theor.43(2010)315207