非線形ポリア過程と不連続転移

北里大理 ^{A} 金融庁 ^{B}
守　真太郎 ^{A}, 久門　正人 ^{B}

Generalized Polya urns and discontinuous phase transition

^{A}*Dept. of Phys., Kitasato Univ.* ^{B}*Financial Services Agency*
S. Mori^A and M. Hisakado^B

非線形 (一般化) ポリア過程はポリア過程を一般化したものである。壺には赤玉、青玉が比率 $z : 1-z$ で入っているとし、任意の関数 $q:[0,1] \to [0,1]$ に対し、確率 $q(z)$ で赤玉を、確率 $1-q(z)$ で青玉を壺に追加していく。このとき、赤玉の比率 z は、$q(z)$ の安定不動点、または $q(z)$ が対角線に接する touchpoint と呼ばれる点に収束する。$q(z)$ がパラメータを持ち、その変化によって安定不動点の個数が変化する状況を考える。具体的には、次の $q(z)$ を考える。

$$q(z) = \frac{1}{2}(\tanh[J(2z-1)+h]+1)$$

このとき、(J,h) 面で境界線 $(J_c(h),h)$ により安定不動点の個数が 1 個、2 個の領域が分けられる (左図参照)。本講演では、下記論文にもとづき、最初の玉の色と $t+1$ 番目の玉の色の間の相関関

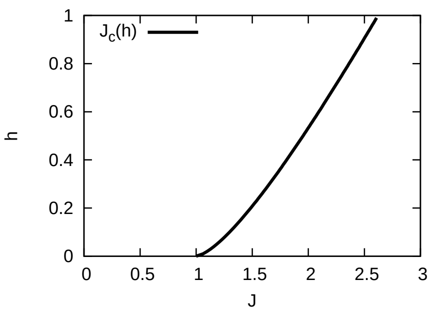

図 1　(J,h) 面での相図

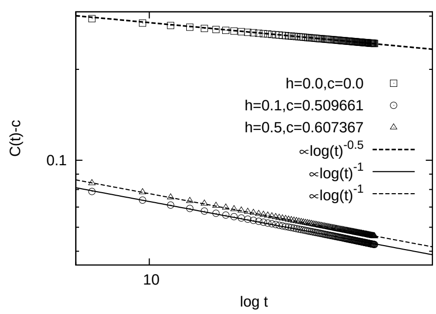

図 2　$C(t)-c$ を $\log t$ に対して両対数プロット

数 $C(t)$ の漸近的な振る舞いについて発表する。$J < J_c(h)$ では系は 1 個の安定不動点 z_+ を持ち、$l = q'(z_+)$, $J > J_c(h)$ では系は 2 個の安定不動点 $z_\pm$ を持ち、$l = \mathrm{Max}(q'(z_+), q'(z_-))$ とすると、$C(t) \simeq c + a \cdot t^{l-1}$ と振る舞う。ここで、c は安定不動点の個数が 1 個の相と 2 個の相の間の非平衡相転移の秩序変数である。1 個の相では $c=0$、2 個の相では $c>0$ となる。一方、$J = J_c(h)$ では、$C(t)-c$ は $\log t$ のべき関数として減衰する (右図参照)。系が対称の場合 $(h=0)$ は $c=0$、非対称 $(h \neq 0)$ な場合は $c>0$ となる。秩序変数の臨界指数 β $(c \propto (J-J_c(h))^\beta)$ は、$\beta = 0$ となり不連続転移であるが、$h=0$ の場合は $J = J_c(0)$ で $c=0$ となり対数関数的な特異性を示す。

[1] Correlation function for generalized Pólya urns: Finite-size scaling analysis S.Mori and M.Hisakado arXiv:1501.00764.