画像修復とグラフ理論

01101 青山 顕（非線形物理学講座）

ノイズによって欠損させた２値 (色) 画像をベイズ統計の手法を用いて元の画像に修復するアルゴリズムの研究を行った。画像は２値変数を用いて x_i=1 は黒、x_i=0 は白の画素を表すものとし、オリジナルの画素情報を x_i(i=1〜n) とする。欠損した画素 y_i(i=1〜n) は、ベイズ統計を用いて事後分布を最大にするような値として修復される。このような方法は、MAP 評価法 (Maximum A Posteriori estimate) と呼ばれる。これを求めるために次の 3 つの方法を使い、比較を行った。

1.Ford-Fulkerson 法と最大流-最小切断定理
2. シミュレーテッド・アニーリング
3.ICM(iterated conditional modes)

Ford-Fulkerson 法とはネットワーク最大フロー問題を解く古典的な方法である。これを応用することによって、厳密な MAP 推定値を算出することができる [**1**]。他の２つの方法ではメトロポリス法を使ったアニーリングによって、MAP 推定法の近似解を求めることができるが、厳密な解が求まることは保証されない。また、計算時間も長くなる。1 の方法は、厳密な MAP の解をを求めることができ、さらに 2 と 3 での近似的な MAP を評価することができるので非常に有用である。

1.MAP 推定値の計算

画素情報 x_i の従う事前分布を $p(x)$ とすると、これは MRF(Markov random field) を使い、次のように書ける。

$$p(x) \propto \exp[\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\beta_{ij}\{x_i x_j + (1-x_i)(1-x_j)\}]$$

結合定数β_{ij}は$\beta_{ij}=\beta(>0)$ のとき画素 i と j は隣り合っているとし,$\beta_{ij}=0$ のときは i と j が隣り合っていず、関連がないということを表している。また,βは隣接画素間の相関の強さにより定まるが、その値は式で表すことができず実際に当てはめてみるしかない。

また,y を実際に観測されるデータとする。y の条件付確率を $l(y|x)$ とするとベイズの公式から、事後分布は

$$p(x|y) \propto l(y|x)p(x) \qquad \cdots(1)$$

となり,MAP 推定値 は $p(x|y)$ を最大にするような$\hat{x}$のことである。次に、ネットワークの最小カットから$\hat{x}$を厳密に求める方法を解説する。但し、次の前提を採用する。y_i は x_iにのみ依るとし、条件付確率密度関数 $f(y_i|x_i)$ は次のように分解できるとする。

$$l(y|x) = \prod_{i=1}^{n} f(y_i|x_i) = \prod_{i=1}^{n} f(y_i|1)^{x_i} f(y_i|0)^{1-x_i}$$

この式を (1) 式に代入すると,$\ln p(x|y)$ は

$$L(x|y) = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\beta_{ij}(x_i x_j + (1-x_i)(1-x_j))$$

第 1 項のλ_iは,$\lambda_i = \ln(f(y_i|1)/f(y_i|0))$ である。MAP 推定値 は L を最大化するような$\hat{x}$となるが、L は 2^n通り,n は 256^2程度の大きさがあるので、しらみつぶしの方法では$\hat{x}$を求めることは不可能である。だが、次に示す通りに、画像データを有向ネットワークで表すことにより,L を最大化し,$\hat{x}$を厳密に求めることができる。先ず、画像データの重みつき有向ネットワークは次のように用意する。画素数分の頂点のほかに流入点 s、流出点 t の 2 つの頂点を加える。$\lambda_i \geq 0$ のとき,s から各画素に辺容量 $c_{si}=\lambda_i$の有向辺 (s,i)、それ以外では各画素から t に辺容量 $c_{it}=-\lambda_i$ の有向辺 (i,t) を加える。画素同士で繋がる辺は隣り合う点のみで、辺容量は$c_{ij}=\beta_{ij}$とする。無向辺なので容量が同じく、向きが有向辺を 2 本加える。全ての画素 x_iに対して,$B=\{s\}\cup\{$i:x_i=1$\}$,
$W=\{$ i:x_i=0$\}\cup\{t\}$ と別ける。B と W で接続し、方向が $s \to t$ の辺の集合を s-t カットといい、それら辺の容量 c_{kl} の総和をカット容量 $C(x)$ と呼ぶと,$C(x)$ は

$$\begin{aligned}C(x) &= \sum_{k\in B}\sum_{l\in W} c_{kl} \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i max(0,-\lambda_i) + \sum_{i=1}^{n}(1-x_i)max(0,\lambda_i) \\ &\quad + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\beta_{ij}(x_i-x_j)^2\end{aligned}$$

となる。上式は定数を除いて $C(x)=-L(x|y)$ となっており,L を最大化するには $C(x)$ を最小化すればよい。$C(x)$ は最大流 – 最小切断定理によって、ネットワークが最大流に達したときに最小となる。よって,$L(x|y)$ を最大化し、厳密なMAP 推定値 を求めることは、最小カットを求めることと等価なのである。

2. 結果

様々なβでシミュレートした結果、大きいβではどちらか片方の色に傾く傾向があった。ICM を用いた方法はβが大きくなっても結果はさほど変化がなく、ローカルミニマムに落ち込んでいると思われる。最後に 2 の方法は,1 と 3 の中間のような結果になった。低いβでは修復画像は元の画像に近いが、大きいβでは画像は完全に潰れてしまった。また、厳密な MAP 推定値を求めたはずの方法 1 よりも方法 2 の方がβの選び方によっては良い結果が得られるという結果になった。

・参考文献

[**1**]D.M. Greig, B.T. Porteous and A.H. Seheult: Exact Maximum A Posteriori Estimation for Binary Images, Journal of the Royal Statistical Society B,**51**,pp.271-279(1989)