Ising Modelを用いたCorrelated PortfolioのPricing

01113 橘川 研史（非線形物理学講座）

1 研究の背景

Correlated Portfolio に対して Ising Model を用いる方法が、スペインの科学者 Jordi Molins と Eduard Vives らによって提案された。N 個のスピンからなるイジングスピン系を考える。上向き (S=1) のスピンを正常債券、下向き (S=-1) のスピンをデフォルト債券と定義しよう。デフォルトと正常のバイアスを外場 H で表し、相関を交換相互作用 J で取り入れる。すると、系の従う確率分布はよく知られる次の式で与えられることになる。

$$P(S_i) \propto \exp\left(\frac{J}{N}\sum_{i,j} S_i S_j + H\sum_{i=1}^{N} S_i\right) \tag{1}$$

Ising Model では次のように、N_d の分布関数を明示的に

$$P(N_d) = \frac{1}{Z_N}\ {}_N C_{N_d} \exp\left(-\beta N_d + \alpha N_d^2\right) \tag{2}$$

と書くことができる ($2J/N = \alpha, 2H + 2J = \beta$ とした)。ここで N_d はデフォルト企業数である。P_d,ρ_d を与える J、H を知ることができれば、Ising Model での N_d の分布関数を用いて CDO などのデフォルト相関を持つアセットをベースにした金融商品のプライシングを行うことが可能となる。しかし、これら二つのパラメータから J、H を求めることは成されていない。計算機でこの逆問題を解く場合、計算負荷は高く、あまり実用的と言い難い。我々は計算負荷を小さくするため、摂動展開による近似を行い、J、H の関数として P_d,ρ_d を求めた。また、Ising Model の分布関数 (2) と他の Binomial Model や Copulas Model でのデフォルト分布との比較、更に複雑なポートフォリオを考慮し、Ising Model を複数業種の場合への拡張を行った。

2 摂動計算

N_d が N に比べて十分小さいと仮定し、(2) の 2 次の項を展開する。このとき、Ising Model にはダブルピーク領域が存在することを考慮に入れなければならない。すなわち、$N - N_d = N_+$ の小さい場合の展開も考える必要がある。まず、次の 2 つの (規格化していない) 二項分布を定義する。

$$\left[N_\pm^l\right] = \sum_{N_\pm=0}^{N} {}_N C_{N_\pm} \exp\left(-\beta_\pm N_\pm \mp HN\right) N_\pm^l \tag{3}$$

($2J \mp 2H = \beta_\pm$)。規格化因子 (分配関数) は Z_+、Z_- の和として $Z_d = Z_+ + Z_-$ と書け、各々は

$$Z_\pm = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^k}{k!} \exp\left(\mp HN\right) \left[N_\pm^{2k}\right] \tag{4}$$

となる。また、$\langle N_d^l \rangle = \langle N_+^l \rangle + \langle N_-^l \rangle$ と分解すると、各々は

$$\langle N_\pm^l \rangle = \frac{1}{Z_N} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^k}{k!} \exp\left(\mp HN\right) \left[N_\pm^{2k+l}\right] \tag{5}$$

と書ける。すなわちデフォルト企業数のモーメントは

$$\langle N_d \rangle = \langle N_- \rangle + N Z_+ - \langle N_+ \rangle \tag{6}$$

$$\langle N_d^2 \rangle = \langle N_-^2 \rangle + N^2 Z_+ - 2N\langle N_+ \rangle + \langle N_+^2 \rangle \tag{7}$$

となり、P_d、ρ_d は上の結果を次の式に代入することで求めることができる。

$$P_d = \frac{\langle N_d \rangle}{N} \tag{8}$$

$$\rho_d = \frac{\sigma_{N_d}^2 + \frac{1}{N-1}\left(\langle N_d^2 \rangle - N\langle N_d \rangle\right)}{\langle N_d \rangle \left(N - \langle N_d \rangle\right)} \tag{9}$$

得られた結果 (k の 2 次までの展開) と厳密解の結果を下のグラフに示す。

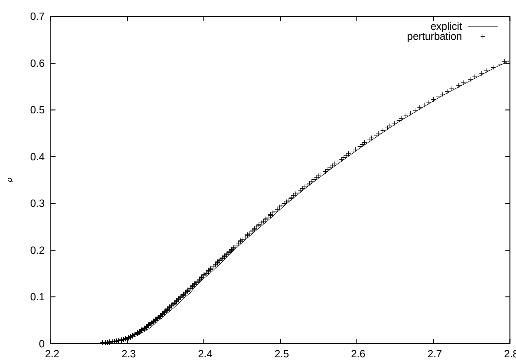

図 1: $P_d = 0.01$ における J と ρ_d の関係

参考文献

- Molins,J.,and Vives,E.,"Long range Ising model for credit risk modeling in homogeneous portfolios,"cond-mat/0401378
- Witt,G.,"Moody's Correlated Binomial Default Distribution"Moody's investors Service, August 10,2004