

1 目的

ベータ二項分布とは完全グラフ上で定義された相関のある二項分布のことであり、その相関構造の美しさが知られている。また様々な実験事実を説明する確率分布としても用いられている。本研究ではベータ二項分布を複雑ネットワーク上に拡張し、その統計的な性質について数値的に研究した。

2 複雑ネットワーク上のベータ二項分布

ワッツやバラバシの研究以降、複雑ネットワークは様々な文脈で研究されている。特に有名なものがWSモデルと呼ばれているスモールネットワークのモデルとBAモデルと呼ばれているグラフの次数がベキで振舞う複雑ネットワークのモデルである。一方、インターネットのサーバーネットワークのシステムの研究において、ダウンの分布関数が非常に裾野が長いことも知られていた。サーバーネットワーク、インターネットワークというのは複雑ネットワークとして知られている。そこで本研究は複雑ネットワーク上にベータ二項分布を拡張し、その分布関数がどう振舞うのかを研究した。

● WSモデル

ワッツとストロガッツが提案したモデルで比較的小さい平均頂点間距離と大きいクラスター係数と大きすぎない平均次数を同時に実現できるスモールワールド・ネットワークモデルである。最初、つながりかえの確率 $P=0$ では格子的な性質を持つグラフで、 $P=1$ の場合はランダムグラフに移行する。

● BAモデル

バラバシとアルバートが考えたモデルで二つの特徴を持つ。ひとつは、頂点が次々と追加されてネットワークが成長していくこと、もうひとつは優先的選択である。追加される頂点は枝を多く持つ頂点に結びつきやすくするため枝を多く持った頂点(ハブ)ができやすい。さらに枝の数はベキ則に従うことや、平均頂点間距離が小さいなどがある。

ギブスサンプリングの手法によりこれらのネットワーク上にベータ二項分布を拡張する。次の式の確率でサイト上の変数 $X_i (i=1 \sim N)$ を次々と更新していくことにより定常分布を求める。完全グラフの場合は通常のベータ二項分布となる。

$$P(n) = \frac{p(1-\rho) + n\rho}{1 + (z-1)\rho}$$

p は $\langle X_i \rangle = p$ とする期待値で $X=1$ を取る確率である。 ρ は $0.0 \sim 1.0$ の定数で隣の値と近い値を取るという相関。 z は各頂点から出ている枝の数、 n は各頂点からつながっている先の頂点の値の合計です。以下の結果は頂点数 $N=100, p=0.3$ とし、10万 MCS でシミュレーションを行ったものである。

3 結果

WSモデルの結果だが、つながりかえの確率 $P=0$ と 1 で実現する相関 ρ_T を調べてみた。 $\rho=0.0 \sim 0.99$ まで調べてみたところ $\rho=0.5$ くらいまでは

$$(\text{実現する相関})\rho_T = \frac{z}{N-1}\rho$$

上式に近い値となったのだが、 $0.5 \sim 0.99$ では $P=0$ ではこの式の値からずれて、 $P=1$ ではさらに $P=0$ より大きな値となった。

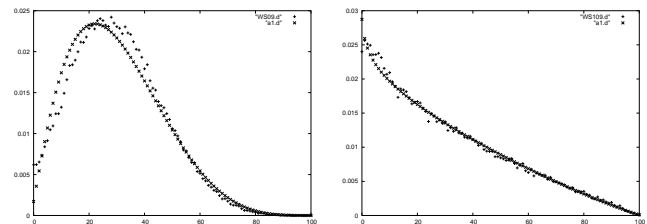


図 1: (左) $P=0$ で $\rho=0.9$, (右) $P=1$ で $\rho=0.9$

$\rho=0.9$ のときの分布の形を比較した。実現する相関 ρ_T をベータ二項分布に代入してプロットしたのが上図である。ベータ二項分布と比較すると、 $P=1$ の WS モデル上の分布関数とベータ二項分布は一致して、 $P=0$ の場合はベータ二項分布とかなり異なる分布となることがわかった。

BA モデルの結果については本番で発表します。

参考文献：複雑ネットワークの科学
著者：増田直紀、今野紀雄