ベータ二項分布VSイジング模型

03153 八巻 真人（非線形物理学講座）

1　目的

イジング模型は2値の確率変数 $S(=\pm 1)$ の間に強い相関を持たせることにより、強磁性ー常磁性の相転移を記述するモデルとして提出されている。一方ベータ二項分布(BBD)はバイオメトリックスなどの分野で相関のあるデータを記述するモデルとしてよく用いられる。本研究ではこの二つの確率分布関数の比較を行なった。

2　ベータ二項分布とイジング模型

- ベータ二項分布
ベータ二項分布は、二項分布のベータ分布による重ね合わせとして定義されている。まず、二値の確率変数 $X_i = 0, 1$ を N 個用意し、確率 q で $X_i = 1$ が実現するとする。X_i と X_j が独立の場合、確率分布は二項分布となる。

$$\mathrm{Prob}(\sum_{i=1}^{N} Xi = n) = {}_NC_n q^n (1-q)^{N-n}$$

また、同時分布関数は、

$$P(X_1, X_2, \cdots, X_N) = \prod_{i=1}^{N} q^{X_i}(1-q)^{1-X_i}$$

である。ベータに項分布はこの確率qをベータ分布 $f(q)$

$$f(q) = \frac{q^{\alpha-1}(1-q)^{\beta-1}}{B(\alpha, \beta)}$$

で重ね合わせる。確率分布関数は

$$\begin{aligned} &\mathrm{Prob}(\sum_{i=1}^{N} Xi = n) \\ = &\ {}_NC_n \int_0^1 f(q) q^n (1-q)^{N-n} dq \end{aligned}$$

同様に同時分布関数は

$$\begin{aligned} &P(X_1, X_2, \cdots, X_N) \\ = &\int_0^1 \prod_{i=1}^{N} q^{X_i}(1-q)^{1-X_i} f(q) dq \end{aligned}$$

このとき X_i の期待値 $< X_i >$ と、X_i と X_j の相関は $Cor(X_i, X_j)$ は、

$$\begin{aligned} p &= < X_i >= \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \\ \rho &= Cor(X_i, X_j) = \frac{1}{\alpha+\beta+1} \end{aligned}$$

以下、この分布のことを、BBD(N, p, ρ) と書くことにする。

- イジング模型
スピンが $Si = \pm 1$ を取るもので確率密度関数は、

$$P(S_1, S_2 \cdots S_N) = \frac{e^{-\beta E(S_1, S_2 \cdots S_N)}}{Z_N(\beta, H)}$$

で表される。
またエネルギー E は、J を最隣接スピン間の相互作用によるエネルギーとすると、

$$E(S_1, S_2 \cdots S_N) = -J \sum_{ij} S_i S_j - H \sum_{i=1}^{N} S_i$$

となる。

3　方法

完全グラフと正方格子上の二つの場合において、各頂点が下の確率分布にしたがって0か1をとることにします。

$$P(n) = \frac{p(1-\rho) + n\rho}{1 + (z-1)\rho}$$

$$P(n) = \frac{e^{\frac{J}{2}(2n-z)+h}}{2cosh\left(\frac{J}{2}(2n-z)+h\right)}$$

ギッブスサンプリングという手法を用いたシュミレーションを行なって確率分布を求めます。p は、$< X_i >$、h は $< X_i >$ をコントロールする定数、ρ,J は相関のパラメータを表しています。z は、サイトのまわりの頂点数の数、また n は1を取った周りの点の数を表しています。

4　結果と考察

BBDは ρ を大きくしていくと山がなだらかになっていくのに対し、イジング模型は J を大きくしていくと山が二つになった。