

SIR モデルとネットワーク依存性

SP 08142 山中 恭佑 非線形物理学研究室

1 SIR モデルとは

SIR モデルとは感染症などの流行の広がりの過程を表すモデル方程式で Susceptible (感受性保持者) Infected (感染中) Recovered (治癒済み) (または Removed (除外)) の三つの状態を持つ。感受性保持者 (S) が感染者 (I) との接触によって感染率 λ で感染状態 (I) になる過程と感染者が治癒率 μ で治癒済みの状態 (R) に移行する過程の二つの過程からなる。時刻 t でのそれぞれの状態の比率を $S(t), I(t), R(t)$ で表すと、モデル方程式は

$$\begin{aligned}\frac{dS(t)}{dt} &= -\lambda S(t)I(t) \\ \frac{dI(t)}{dt} &= \lambda S(t)I(t) - \mu I(t) \\ \frac{dR(t)}{dt} &= \mu I(t)\end{aligned}$$

となる。もちろん、 $S(t) + I(t) + R(t) = 1$ が成立する。なお SIR モデルは噂話などの情報伝搬のモデルとしても使える。初期状態を、十分小さな正の数 ϵ を用いて、 $S(0) = 1 - \epsilon, I(0) = \epsilon, R(0) = 0$ とし、 $t \rightarrow \infty$ での $R(\infty)$ が $\epsilon \rightarrow 0$ の極限で有限かゼロの値をとる λ の閾値 λ_c を求めると、

$$\lambda_c = \mu$$

となる。

ネットワークでの感染の伝搬の SIR モデルを考える。ネットワークは、ノード (頂点) とリンクからなり、頂点から出ているリンクの数 k を次数と呼ぶ。ネットワークの構造を次数分布で表し、次数 k のノードの比率を $P(k)$ とする。このとき、ネットワークでの SIR モデルの方程式は、次数 k のノードでの時刻 t での状態 S, I, R の比率を $S_k(t), I_k(t), R_k(t)$ で表すと、

$$\begin{aligned}\frac{dS_k(t)}{dt} &= -k\lambda S_k(t)\Theta(t) \\ \frac{dI_k(t)}{dt} &= k\lambda S_k(t)\Theta(t) - \mu I_k(t) \\ \frac{dR_k(t)}{dt} &= \mu I_k(t)\end{aligned}$$

$\Theta(t)$ はノードのリンク先が状態 I である確率を表し、平均場近似を用いて

$$\Theta(t) = \frac{\sum_{k=0}^{\infty} kP(k)I_k(t)}{\langle K \rangle}$$

と近似することができる。

なお λ と μ を定数倍しても式は不変なので式を簡単にするため $\mu = 1$ とする。全ノードでの状態 S, I, R の比率の平均値を $S(t), I(t), R(t)$ で表し、 $S_k(0) = 1 - \epsilon, I_k(0) = \epsilon, R_k(0) = 0$ に対して $R(\infty)$ が $\epsilon \rightarrow 0$ でゼロから有限になる λ の閾値 λ_c を求めると、

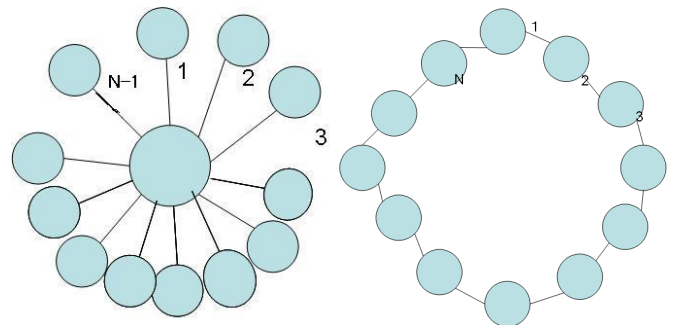
$$\lambda_c = \frac{\langle k \rangle}{\langle k^2 \rangle}$$

となる。

2 実際のネットワーク

このように、ネットワークの次数分布を用いて感染が蔓延するための閾値が与えられている。しかし、その式は平均場近似とすべてのノードに共通の感染源を置いた場合の結果である。ここでは、平均場近似ではなくノード間の接続を考慮した方程式を立てネットワークの脆弱性を調べる。さらに、どういったネットワークが感染の万延に対して頑健なのかについても調べる。

ハブにリンクが集中したネットワークと末端同士がリンクしたネットワークを比較する



(a) リンクが集中した構造 (b) リンクが分散した構造

図1 ネットワーク構造

図 (a) はハブとなるノードに $k = 1$ のノードが $N-1$ 個つながったネットワーク、図 (b) は左右につながった $k = 2$ のノード N 個が輪状につながったネットワークである。(a) のネットワークは $N \rightarrow \infty$ において $\langle k \rangle = \frac{2N}{N+1} \simeq 2$ であり $\langle k^2 \rangle = N$ となる。図 (a) のネットワークは $N-1$ 個の $K = 1$ のノードが $K = N-1$ のノードと接している。一方 $k = 1$ のノードは $K = N-1$ のノードと一個あたり一つ接している。

よってその方程式は

$$\begin{aligned}\frac{dS_1(t)}{dt} &= -\lambda S_1(t)I_N(t) \\ \frac{dI_1(t)}{dt} &= \lambda S_1(t)I_N(t) - I_1(t) \\ \frac{dR_1(t)}{dt} &= I_1(t) \\ \frac{dS_N(t)}{dt} &= -N\lambda S_{N-1}(t)I_1(t) \\ \frac{dI_N(t)}{dt} &= N\lambda S_{N-1}(t)I_1(t) - I_N(t) \\ \frac{dR_N(t)}{dt} &= I_{N-1}(t)\end{aligned}$$

これを解くと $\lambda_{c(k=1)} = \lambda_{c(k=N)} = \frac{1}{\sqrt{N}}$ 平均場の数値 $\lambda_c = \frac{2}{n}$ とは一致しない。

図 (b) の場合、 $N \rightarrow \infty <k> = 2$ であり $<k^2> = 4$ どのノードも二つの $k = 2$ のノードと接しており、方程式は

$$\begin{aligned}\frac{dS_2(t)}{dt} &= -\lambda S_2(t)I_2(t) \\ \frac{dI_2(t)}{dt} &= \lambda S_2(t)I_2(t) - \mu I_2(t) \\ \frac{dR_2(t)}{dt} &= \mu I_2(t)\end{aligned}$$

これを解くと $\lambda_{c(k=2)} = \frac{1}{2}$ これは平均場の時と一致する。

3 応用

図 (a) のネットワークが平均場近似と異なるのはハブが独立しているからで、フリースケールネットワークではハブから別のハブへの接続があると想定する。そこでハブ同士の接続がある、図 2 のようなネットワークを想定する。そしてこのネットワークに合わせた方程式を立てると

$$\begin{aligned}\frac{dS_{N+1}(t)}{dt} &= -\lambda \frac{1}{N+1} (NI_1 + I_{N+1})S_N(t) \\ \frac{dI_{N+1}(t)}{dt} &= \lambda \frac{1}{N+1} (NI_1 + I_{N+1})S_N(t) - \mu I_{N+1}(t) \\ \frac{dR_{N+1}(t)}{dt} &= \mu I_{N+1}(t) \\ \frac{dS_1(t)}{dt} &= -\lambda S_1(t)I_{N+1}(t)\end{aligned}$$

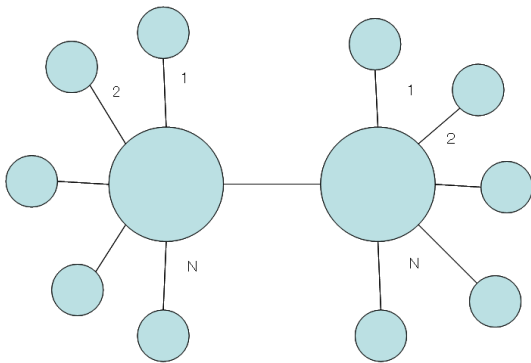


図 2

$$\begin{aligned}\frac{dI_1(t)}{dt} &= \lambda S(t)_1 I(t)_{N+1} - \mu I_1(t) \\ \frac{dR_1(t)}{dt} &= \mu I_1(t)\end{aligned}$$

となる

これを解いて $\lambda_c = \frac{1}{\sqrt{N}} - \frac{1}{2N}$ これも平均場近似の値 $\lambda_c = \frac{2}{N}$ とは一致しなかった

さらにハブの数を増やして計算を試みたが $\frac{1}{\sqrt{N}}$ の項が消えずに平均場近似と実際のネットワークを想定した方程式は一致しない事が分かった。

4 結果・考察

- ・ネットワーク結合を考慮した方程式を立て、閾値を評価すると平均場近似の公式とは違う値になった

- ・このように極少数のみハブからなる構造のネットワークでは平均場近似が使えないのではないかと

- ・実際のノード毎のつながりを考えた方程式は必ずしも平均場近似とは一致しない

- ・現実のモデルに当てはめるには個体同士の結合の仕方を考慮したネットワークモデルでのシミュレーションが必要である

- ・平均場近似の公式によって求めた値とは大きく異なる数値となった

- ・平均場近似の妥当性を検証する必要がある

- ・均一なネットワークの時は平均場近似と一致した

- ・平均場近似は適応出来るときもあるので完全に間違っているわけではない

- ・今回は $1 - \epsilon = 1$ としたが実際はわずかに差がある

- ・流行の閾値は初期分布の大きさにも影響される

5 参考文献

増田直紀、今野紀雄 著 「複雑ネットワーク 基礎から応用まで」 2010 年 4 月初版発行 近代科学社