スケール不変性の検証方法と DNA 配列の解析

SP 10144 吉田 俊介 非線形物理学研究室

1 はじめに

0,1 の数列パターンを発見するために、従来は長さ L の領域での 1 の個数の分布の分散 $V(L)$ を調べることが行われてきた [1]。ここでは、確率過程の臨界的な振る舞いを調べる手法として有限サイズスケーリングを用いたものを提案する。それは、0,1 の確率過程に対し、相関関数を用いて計算した相関時間 (二次モーメント相関時間) に基づくものである。0,1 のパターンのスケール不変性の判定基準を示し、DNA 配列が緩和時間に対するスケーリング関係式を満たすことを示した。

2 DNA 配列とスケール不変性の定義

従来の研究から、DNA での配列パターンでの相関が非常に強く、A,T,C,G を 0,1 に変換した配列に対するランダムウォークモデルに基づく解析から、超拡散相と呼ばれる分散 $V(L)$ が L の一次以上のベキ関数に従うことが知られてきた。その簡単なモデルとして S.Hod らが提案したのは次の確率モデルである [2]。

$$Prob(X(t)=1|\tfrac{1}{t}\sum_{s=1}^{t}X(s)=z)=(1-p)q+pz$$
$$X(t)\in\{0,1\}, t\in\{1,2,3,\cdots,T\}$$

これは、0,1 の二値の確率過程 $X(t)\in\{0,1\}$ であり、独立な成分 $1-p$ と過去の記憶に線形に依存する成分が p の割合で混ざったものである。拡散近似を用いて $V(L)$ に対する微分方程式を解析した結果、p が 1/2 未満では $V(L)$ が L に比例する通常の拡散的な相 (nomal diffusion phase)、p が 1/2 以上では L^{2p} に比例する超拡散相 (super diffusion phase)、$p=1/2$ では $L\log(L)$ に比例する相と p の値の変化によって動的な相転移が起こることが示された。我々はこの確率モデルを厳密に解析し、$X(t)$ と $X(t+s)$ の相関関数 (共分散と定義する) $Cor(s)$ が s^{p-1} に比例することを導き、相関関数の振る舞いには動的な相転移に関連する非解析性がないことを示した [3]。

$$Cor(s)=Cov(X(t),X(t+s))\propto t^{p-1}$$

この結果を元に、確率過程がスケール不変であることを、分散 $V(L)$ の超拡散的な振る舞いではなく相関関数のベキ性で定義することを提案する。

3 スケール不変性の検証

確率過程がスケール不変性を持つかどうかは相関関数 $Cor(t)$ のベキ性を検証すればよい。しかし、相関関数は t が大きくなるとバラつきも大きくまた、ベキ性の検定は一般に難しい。そこで、相関時間に基づくスケーリング解析を提案する。相関時間 $\xi(t)$ を次の式で定義する。

$$\xi(t)=\sqrt{M_2(t)/M_0(t)}$$

ここで、$M_n(t)$ は $Cor(t)$ を用いて計算された t の n 次モーメントであり、この定義は周期境界条件での確率モデルの平衡状態のスケーリングを調べるために導入された相関距離の定義を周期境界ではない時系列に用いるために修正したものである [3]。相関関数 $Cor(s)$ が s^{p-1} 乗で振る舞うことから、$\xi(t)$ は $\sqrt{\frac{p}{p+2}}t$ となり、t に比例することが分かる。また、緩和時間を積分相関時間として定義すると、

$$\tau(t)\simeq\frac{1}{p}t^p$$

となり、t^p に比例する。よって、系がスケール不変であるとき、$\xi(t)/t$ と $\tau(t)/t$ の t が無限大での値は前者が定数、後者が 0 となることが分かる。また、緩和時間の普遍関数 $\frac{\tau(2t)}{\tau(t)}=f_\tau(\frac{\xi(t)}{t})$ は 2^p となる。

4 DNA 配列のスケール不変性

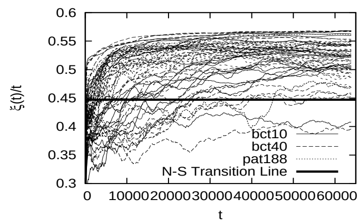

図 1 t vs $\xi(t)/t$

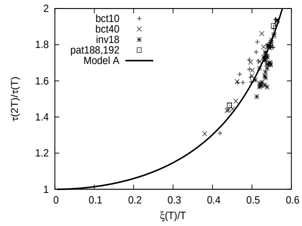

図 2 $\xi(t)/t$ vs f_τ

図は gbbct10,gbbct40,gpat188 などの DNA 配列のうち長さが 10^6 以上のものでスケール不変がきれいに見えているものの図 1 は $\xi(t)/t$ を t に対して、図 2 は $\xi(t)/t$ を f_τ に対してプロットしたものである。t が大きくなるにつれ図 1 は $\xi(t)/t$ が一定の値に近づき、図 2 は f_τ が 0 に近づくことが分かる。$\tau(t)/t$ と $\tau(t)$ のスケーリング関係の解析から DNA 配列はスケール不変性を持っているものもあることが検証できた。

参考文献

[1] G.M.Viswanathan rt al, Biophys.J.72(1997)866.

[2] S.Hod-and-U.Keshet,phys.Rev.E70,(2004),015104-015107.

[3] S.Mori-and-M.Hisakado,in preparation.