ゾンビ感染の数理モデルとヒトの生存条件

SP12113　非線形物理学研究室　川崎紫苑

1. はじめに

ゾンビを物理のテーマとして扱うことは理論的な悪ふざけに見えるかもしれない。ゾンビはホラー映画や小説では欠かせない題材ではあるが、架空の感染症にすぎない。しかし、2009 年以降、ゾンビの個体群ダイナミックス、ゾンビ感染の強さをベイズ統計で評価するもの、悪い評判の拡大を止めるためのアルゴリズムなどの論文が相次いで出版された [1,2]。ここで、ゾンビとは、死にいたる伝染病であり、宿主を殺すばかりでなく、宿主を媒介者に変えるものであり、媒介者となった宿主のことをゾンビと呼ぶ。ソンビはヒトを噛むことでゾンビに変える。ゾンビの寿命には限りがなく、ヒトが殺すしかゾンビを殺す方法はない。つまり、ゾンビとヒトの共生は不可能であり、どちらかが滅びるまで戦いは続くのである。

では、ソンビが発生したとき、ヒトが生き残る条件は何で決まるのであろうか？ SIR モデルなどの感染症のモデルでは、感染者の比率がある閾値を超えると、感染症の outbreak が起きるが、感染した患者は勝手に死ぬか隔離 (removed) され、ヒトが絶滅する前に感染症は収束する。一方、ゾンビの場合は、必ずどちらかが絶滅する。本研究では文献 [2] で導入された SZR モデルというゾンビの感染モデルをもとに、ゾンビとヒトが移動する効果を取りいれた拡散 SZR モデルでのヒトの生存条件を解析する。

2. SZR モデルとヒトの生存条件

SZR モデルとは、ヒト、ゾンビ、ヒトに殺されたゾンビの個体群ダイナミックスのモデルである。ヒト (Susceptible, 未感染者)、ゾンビ (Zombie)、ヒトに殺されたゾンビの数 (Removed) をそれぞれ S, Z, R で表すとする。ゾンビは本能的にヒトに噛み付こうとし、噛み付かれたヒトはゾンビとなる。ヒトはゾンビに噛まれないようにするために、逃げるか、ゾンビの頭部をつぶしてゾンビを殺すしかない。単位時間あたり、ゾンビがヒトに噛み付く確率を β、ヒトがゾンビを殺す確率を κ で表すとする。

初期状態の個体数を $N = S(0) + Z(0) + R(0)$ で表すとする。単位時間に N 個の個体が１人１回行動するとする。個体がヒトである確率は S/N であり、ランダムに相手の個体を選択したとき、それがゾンビである確率は Z/N で、殺す確率は κ なので、確率 $\kappa(Z/N)$ でゾンビが１人減る。個体がゾンビである確率は Z/N で、ランダムに選んだ相手がヒトの確率は S/N。確率 β で噛み付くことに成功し、ゾンビが１人増加し、ヒトが１人減少する。単位時間あたり、ヒトは $\beta \cdot (Z/N) \cdot S$ だけ減少し、ゾンビは $(\beta - \kappa) \cdot (S/N) \cdot Z$ だけ変化する。差分方程式で書くと、

$$
\begin{aligned}
S(t+1) - S(t) &= -\beta \cdot N \cdot (Z/N) \cdot (S/N) \\
Z(t+1) - Z(t) &= (\beta - \kappa) \cdot N \cdot (Z/N) \cdot (S/N) \\
S(t+1) - S(t) &= -\kappa \cdot N \cdot (Z/N) \cdot (S/N)
\end{aligned}
$$

となる。ここで、$S(t), Z(t), R(t)$ は数学的には確率過程を表す確率変数だが、上記の差分方程式は N が十分大きいとしてそれらの期待値の差分方程式と考えている。$\beta t = \tau$ と変数変換し、ヒトがゾンビを殺す確率とヒトがゾンビに噛まれる確率の比を $\alpha = \kappa/\beta$ と書き、また、差分方程式を微分方程式にすると、

$$
\frac{dS}{d\tau} = -\frac{SZ}{N} \ , \ \frac{dZ}{d\tau} = (1-\alpha) \cdot \frac{SZ}{N} \ , \ \frac{dR}{d\tau} = \alpha \cdot \frac{SZ}{N}
$$

となる。この連立微分方程式を SZR モデルと呼ぶ。

この連立微分方程式は積分することが出来る。$P_0 = (1-\alpha)S(0) + Z(0), X_0 = S(0)/Z(0)$ と書くと、$P_0 \neq 0$ のとき、

$$
\begin{aligned}
S(\tau) &= \frac{P_0 X_0 \exp(-P_0\tau/N)}{1 + (1-\alpha)X_0 \exp(-P_0\tau/N)} \\
Z(\tau) &= \frac{P_0}{1 + (1-\alpha)X_0 \exp(-P_0\tau/N)}
\end{aligned}
$$

となる [1]。$P_0 > 0$ のとき、ヒトは絶滅し、$P_0 < 0$ のとき、ヒトは生き残る。閾値に対応する α を α_c と書くと、$\alpha_c = 1 + \frac{1}{X_0}$ となる。$\alpha > \alpha_c$ がヒトの生存条件である。一方、$\alpha = \alpha_c$ のとき $P_0 = 0$ となる。このとき、$S(\tau), Z(\tau)$ は、

$$
S(\tau) = \frac{N \cdot S(0)}{Z(0)\tau + N} \ , \ Z(\tau) = \frac{N \cdot S(0)}{S(0)\tau + N \cdot X_0}
$$

と求めることが出来る。$\tau \to \infty$ では $S(\tau), Z(\tau)$ はともにゼロに収束するので、$\alpha = \alpha_c$ のとき、ゾンビもヒトも滅びてしまうことが分かる

3. 拡散 SZR モデル

上のモデルでは、ヒトもゾンビも移動ぜず、どちらか、$\alpha = \alpha_c$ では両方、が滅びるまで戦闘状態が続いた。しかし、実際にはヒトはゾンビから逃げるであろうし、ゾンビはヒトのにおいのほうに移動するであろう。[2] では、ゾンビ発生時にヒトの移動が制限されるので、ヒトの移動はないとし、ゾンビのみが秒速１フィートで移動するとして全米でのゾンビの蔓延のシミュレーションを行っている。そこで、SZR モデルにゾンビの拡散項を導入し、その拡散係数を D とする。周期境界条件を課した１次元空間 $x \in [0, 1]$ を考え、(τ, x) でのヒト、ゾンビ、ヒトに殺されたゾンビの密度をそれぞれ $\phi_S(x, \tau), \phi_Z(x, \tau), \phi_R(x, \tau)$ で表すとすると、考えるモデルは

$$
\begin{aligned}
\partial_\tau \phi_S &= -\phi_S \phi_Z \\
\partial_\tau \phi_Z &= D\Delta\phi_Z + (1-\alpha) \cdot \phi_S \phi_Z \\
\partial_\tau \phi_R &= \alpha \cdot \phi_S \phi_Z
\end{aligned}
$$

となる。初期条件は $x = 0.5$ にのみゾンビが存在し、$\phi_S(x, 0) = S(0), \phi_Z(x, 0) = Z(0)\delta_{x,1/2}, \phi_R(x, t) = 0$ とする。$D = 0$ のとき、$x = 0.5$ のみゾンビが存在し拡散がないのでヒトは生存する。拡散する場合、ほぼ $1/X_0 = 0$ と考えると $\alpha_c = 1$ となる。この予想を検証する。また、$\alpha = \alpha_c$ でのゾンビの臨界的な感染の拡大の様子を調べる。

参考文献

[1] P.Munz, I. Hudea, J.Imad and R.J.Smith, When zombies attack !: Mathematical modeling of an outbreak of zombie infection, Infect. Dis. Model. Res. Prog. 4,133(2009).

[2] A. A. Alemi, M. Bierbaum, C. R. Myers, J. P. Sethna, You Can Run, You Can Hide: The Epidemiology and Statistical Mechanics of Zombies, Phys. Rev. E 92, 052801 (2015).