ランダムネットワークのパーコレーションと高次クリークの影響

SP12112　非線形物理学研究室　萱沼美幸

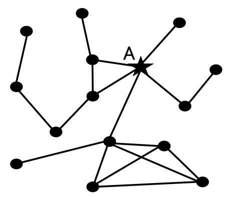
1. はじめに

ネットワークサイエンス、ソーシャルフィジックスといった新たな研究分野の進展により、ヒトの間の相互作用の理解がすすみ、ヒトの行動を物理モデルを用いて記述・コントロールすることが可能になってきた。そこではヒトの集団というソーシャルな系は強い相互作用の働く複雑ネットワークモデルで記述される。複雑ネットワークモデルにおいてはネットワークを樹状構造をと捉えて解析をすすめることが多い [1]。しかし、樹状構造を仮定することで複雑ネットワークのモデルの本質を見落とす可能性もある。本研究では樹状のネットワークにクリークと呼ばれる全結合のグラフをランダムに埋め込んだときのボンドパーコレーションの解析を行った。A.Hackett らの論文 [2] をもとにクリークサイズ c が $c \leq 5$ の場合の計算を行うアルゴリズムを実装し、ボンドパーコレーションでの最終感染比率を計算した。

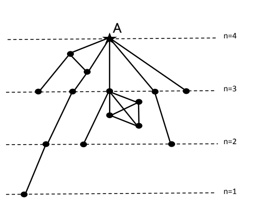
2. ネットワークとクリーク

ネットワークとは、頂点（ノード）と頂点同士を結ぶ枝（リンク、エッジ）から成る構造のことである。ネットワークにおいて、1 つの頂点から出ている枝の数を次数 k と呼び、ネットワーク全体に占める次数 k をもつ頂点の割合を次数分布と呼ぶ。また、クリークとは、ネットワークの局所的構造を意味する言葉である。例えば、友人関係をネットワークと考えると、自分の 2 人の友人が友人関係にあるなら、自分を含めて 3 人は互いに友人関係にあり、3 人はクリークを形成しているという。クリークを形成する全ノード数をクリークサイズ c で表すことにする。さらに、ランダムに選んだ頂点が次数 k をもちクリーク c を含む確率を $\gamma(k,c)$ で表すとする。

確率分布 $\{\gamma(k,c)\}$ で与えられたネットワークモデルを調べるとき、ネットワークを樹状構造に置き換えることが行われる [1]。Fig.1(a) に、ネットワークの例を示した。一方、Fig.1(b) は、(a) のネットワーク内の任意の頂点 A をルートとして樹状構造に書き換えた図である。



(a) ネットワーク. ノード A は次数 $k=5$ で $c=3$ のクリークに含まれる.



(b) A をルート（根）とした樹状構造に変換

Fig.1: N=15 ネットワーク

ネットワーク $\{\gamma(k,c)\}$ でのボンドパーコレーションを考える。ボンドパーコレーションでは、あるノードから別のノードへ感染が伝わるかどうかは、2 つの頂点間のリンクが結ばれているかどうかで決まる。リンクが結ばれる確率を ϕ と書くことにする。問題は、リンクで結ばれたノードの集合の最も大きなもの (Giant Connected Component, 以下 GCC) のサイズ (ノード数) がネットワークの全ノード数に比例するか、それとも比例しないかである。パーコレーション相転移では、全ノード数が無限大の極限での GCC の比率を秩序変数とし、GCC のサイズが全ノード数に比例すれば有限値、比例しなければゼロをとる。GCC のサイズの比率を計算する。頂点が GCC に含まれている場合はその頂点を active、含まれていない場合は inactive と呼ぶことにする。

任意に選ばれたノードが GCC に含まれる確率 ρ は、ネットワークを樹状構造に変換し (Fig.1(b))、樹状構造のルート（一番上の頂点）から無限に離れた点が active である確率がルートに向かって伝播していくと考えた漸化式を解くことで求める。この確率 ρ は GCC の比率を表すので、パーコレーション転移の秩序変数である。

3.GCC のサイズの ϕ 依存性

次数分布は z を平均次数としてポアソン分布 $p_k = z^k e^{-z}/k!$ に従うものとし、$c = 3,4,5$ のクリークが確率 α, β, γ で存在するものとする。確率分布 $\{\gamma(k,c)\}$ は、

$$\gamma(k,c) = p_k \cdot ((1-\alpha-\beta-\gamma)\cdot\delta_{c,1} + \alpha\cdot\delta_{c,3} + \beta\cdot\delta_{c,4} + \gamma\cdot\delta_{c,5})$$

となる。このとき、秩序変数（GCC の比率）ρ を ϕ に対してプロットしたものが Fig.2 である。

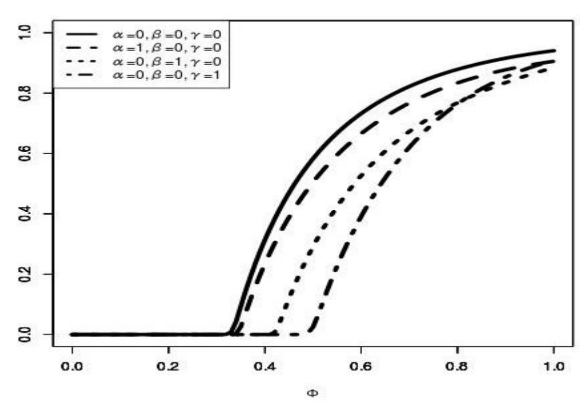


Fig.2: ランダムネットワーク $\{\gamma(k,c)\}$ のボンドパーコレーションの秩序変数 ρ を ϕ に対してプロット.
$\alpha=0, \beta=0, \gamma=0$ のとき $\phi_c=0.34$、$\alpha=1, \beta=0, \gamma=0$ のとき $\phi_c=0.35$、$\alpha=0, \beta=1, \gamma=0$ のとき $\phi_c=0.43$、$\alpha=0, \beta=0, \gamma=1$ のとき $\phi_c=0.50$.

ρ がゼロから有限の値に変化する点として相転移の閾値 ϕ_c を評価した。結果は図のキャプションにまとめてある。一般に、クリークの存在により、また、大きなクリークの存在により相転移の閾値 ϕ_c が増えていることが分かる。今後はボンドパーコレーションに加え、Watts のカスケードモデルの結果についても述べる予定である。

参考文献

[1] 増田直紀, 今野紀雄,「複雑ネットワーク　基礎から応用まで」, 近代科学社,2011.

[2]A.Hackett,P.Gleeson, Phys.Rev.E87,062801(2013).