ゾンビ感染の数理モデルと人の生存条件

非線形物理学講座　SP12113　川崎紫苑

1.はじめに

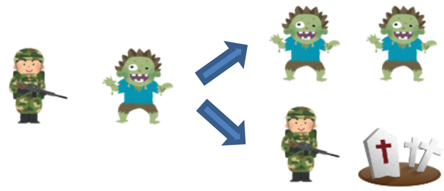
ゾンビを物理のテーマとして扱うことは理論的な悪ふざけに見えるかもしれない。ゾンビはホラー映画や小説では欠かせない題材ではあるが、架空の感染症にすぎない。しかし、2009 年以降、ゾンビの個体群ダイナミックス、ゾンビ感染の強さをベイズ統計で評価するもの、悪い評判の拡大を止めるためのアルゴリズムなどの論文が相次いで出版された[1,2]。

ここで、ゾンビとは、死にいたる伝染病であり、宿主を殺すばかりでなく、宿主を媒介者に変えるものであり、媒介者となった宿主のことをゾンビと呼ぶ。ソンビはヒトを噛むことでゾンビに変える。映画ではゾンビの寿命には限りがなく、ヒトが殺すしかゾンビを殺す方法はない。つまり、ゾンビとヒトの共生は不可能であり、どちらかが滅びるまで戦いは続くのである。

では、ソンビが発生したとき、ヒトが生き残る条件は何で決まるのであろうか？SIR モデルなどの感染症のモデルでは、感染者の比率がある閾値を超えると、感染症の outbreak が起きるが、感染した患者は勝手に死ぬか隔離(removed)され、ヒトが絶滅する前に感染症は収束する。一方、ゾンビの場合は、必ずどちらかが絶滅する。本研究では文献[2]で導入された SZR モデルというゾンビの感染モデルをもとに、ゾンビとヒトが移動する効果を取りいれた拡散 SZR モデルでのヒトの生存条件を解析する。そしてその解析をもとに日本でゾンビが発生したときどのようになっていくか、その変化を見ていく。

2.SZR モデル

SZR モデルとは、ヒト、ゾンビ、ヒトに殺されたゾンビの個体群ダイナミックスのモデルである。ヒト(Susceptible,未感染者)、ゾンビ(Zombie)、ヒトに殺されたゾンビの数(Removed)をそれぞれ S,Z,R で表すとする。



<図 1>.ゾンビと人の関係

ヒトとゾンビが対面したときゾンビは本能的にヒトに噛み付こうとし、噛み付かれたヒトはゾンビとなる。ヒトはゾンビに噛まれないようにするために、逃げるか、ゾンビの頭部をつぶしてゾンビを殺すしかない。SZR の微分方程式については以下の式で表すことができる[1]。

$$
\begin{aligned}
\frac{dS}{dt} &= -\beta SZ \qquad \cdots(1)\\
\frac{dZ}{dt} &= (\beta-\kappa)SZ\\
\frac{dR}{dt} &= \kappa SZ
\end{aligned}
$$

ここでβは単位時間あたりにゾンビが人に噛みつく確率、κは単位時間あたりにヒトがゾンビを殺す確率としている。この連立微分方程式は積分することが出来る。

$P_0 = (1-\alpha)S(0) + Z(0)$、$X_0 = S(0)/Z(0)$ と書くと、$P_0 \neq 0$のとき、

$$
\begin{aligned}
S(\tau) &= \frac{P_0 X_0 \exp(-P_0\tau/N)}{1+(1-\alpha)X_0 \exp(-P_0\tau/N)} \\
Z(\tau) &= \frac{P_0}{1+(1-\alpha)X_0 \exp(-P_0\tau/N)} \\
R(\tau) &= N - S(\tau) - Z(\tau)
\end{aligned}
$$

となる[1]。$P_0 > 0$のときヒトは絶滅し、$P_0 < 0$のときヒトは生き残る。

閾値に対応するαをα_Cと書くと、$\alpha_C = 1 + 1/X_0$となる。$\alpha > \alpha_C$がヒトの生存条件である。一方$\alpha = \alpha_C$のとき$P_0 = 0$となる。このとき、S(τ)、Z(τ)は、

$$S(\tau) = \frac{N \cdot S(0)}{Z(0)\tau + N}, \quad Z(\tau) = \frac{N \cdot S(0)}{S(0)\tau + N \cdot X_0}$$

と求めることが出来る。$\tau \to \infty$では S(τ)、Z(τ)はともにゼロに収束するので、$\alpha = \alpha_C$のとき、ゾンビもヒトも滅びてしまうことが分かる。

3.β と κ の具体的な数値

次にゾンビのやヒトの具体的な強さを求める。単位時間当たりにゾンビの噛みつく確率βを求めるためにゾンビの移動する速さ v は 0.3[m/s]=0.3×10^{-3}[km/s]。ゾンビが人を検知して攻撃できる範囲を移動方向に対して垂直に R=30[m]=0.03[km]とする。この範囲に入った瞬間にゾンビはヒトに噛みつくものとする。次に$h \times h$[km^2]の領域にヒト S 人、ゾンビ Z 人いるとすると領域内のヒトの密度は S/h^2[$/km^2$]と表せる。Δt の間に Z 人のゾンビが噛みつく人数 B(Δt)は

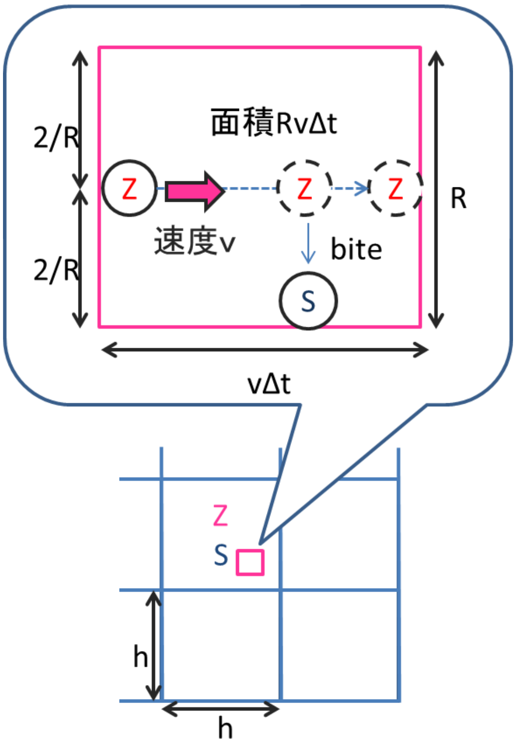
$$B(\Delta t) = \frac{S}{h^2} R v Z \qquad \cdots(2)$$

で求められる。

ヒトの減少分はすべてゾンビが噛みつく人数(ゾンビの増加分)といえるので、ここで(1)式と(2)式とを比較すると

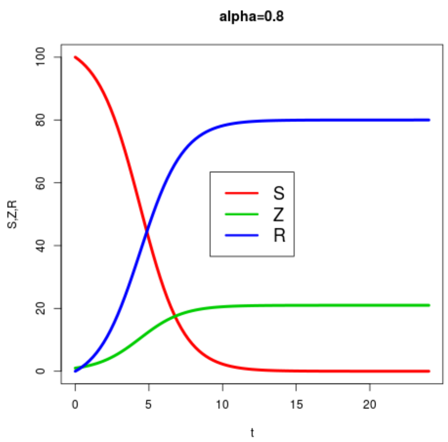
$$\beta = \frac{1}{h^2} R v = 10^{-6} [/s]$$

と言える。

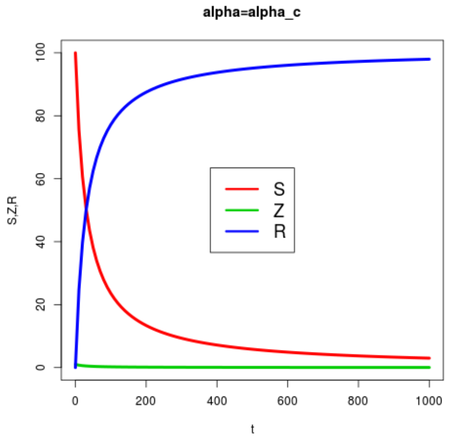


<図 2.>ゾンビの噛みつくレンジ

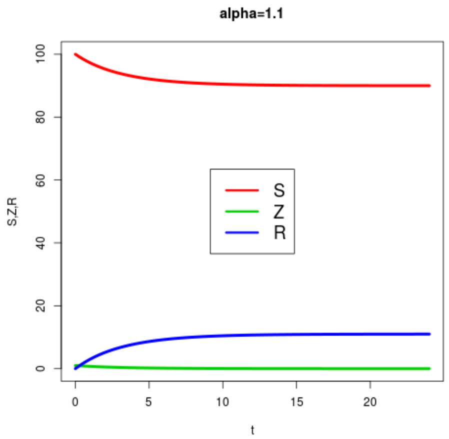
h^2[km^2]のある 2 次元領域にヒト S 人、ゾンビ Z 人いるとする。その条件の元 24 時間観測するとどうなるかシミュレーションする。



<図 3.>α = 0.8 の結果



<図 4.>$\alpha = \alpha_C$＝1.01 の結果



<図.5>α＝1.1 の結果

ここで$\alpha = \alpha_C = 1.01$のときはべき関数的な変化をするので時間は 1000 時間で計測した。

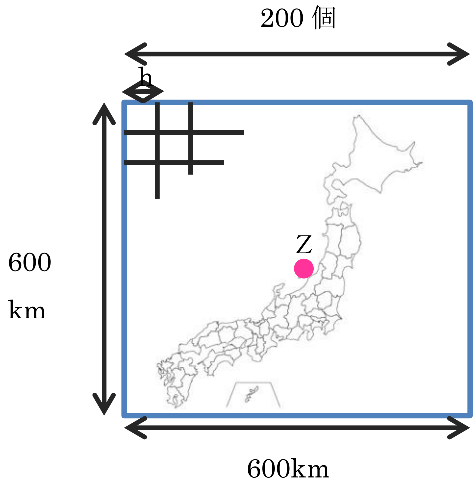
4.拡散項を考慮した SZR モデル

実際にゾンビが発生したらゾンビはある領域(都市)から出て隣の領域に移るだろう。そして政府は感染の拡大を防ぐために、ヒトの都市間の移動を制限する。

ここで SZR の方程式に拡散項 D の要素を加えることでゾンビがランダムに動き回る場合を考えることができる。

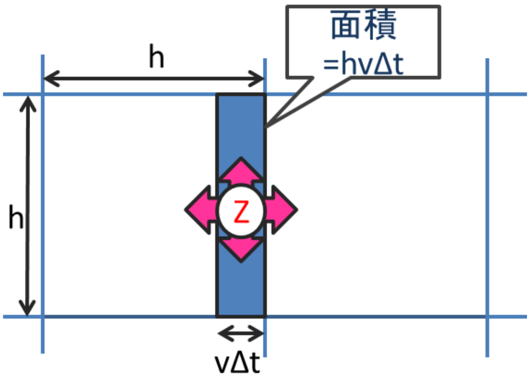
$$
\begin{aligned}
\partial_t \phi_S &= \phi_S - \beta \cdot \phi_S \phi_Z \\
\partial_t \phi_Z &= D \Delta \phi_Z + (\beta - \kappa) \cdot \phi_S \phi_Z \\
\partial_t \phi_R &= \kappa \cdot \phi_S \phi_Z
\end{aligned}
$$

拡散項 D がどれほどの大きさになるかを求めるために、日本の総面積を 360000[km^2]の h=3[km]のグリッドで 200×200 個に分割された正方形とし、ヒト 1 億 2000 万人を配置し、その中心にゾンビを 1 体配置する。

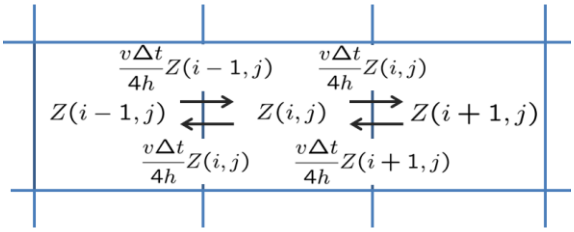


<図.6>近似した日本をグリッドで分割

次にグリッドについて着目する。グリッド内にゾンビが Z 人いるとすると、ゾンビの密度はZ/h^2[$/km^2$]。Δt当たりのグリッドの端のおける面積は $hv\Delta t$[km^2]。これらの積がグリッドの端にいるゾンビの数と表せます。この中にいるゾンビが動ける 4 方向のうち、隣のグリッドに移る確率は 1/4 なのでそれをかけることでΔtの間にゾンビが隣のグリッドに移る確率($= \frac{v\Delta t}{4h} Z$)が求まる。



<図.7>Δt間におけるグリッド境界でのゾンビのふるまい



<図.8>グリッド間でのゾンビの移動

i,j におけるグリッドのゾンビの変化率は

$$\begin{aligned}\Delta Z(i,j) &= \frac{v\Delta t}{4h}\frac{Z(i+1,j)+Z(i-1,j)-2Z(i,j)}{h^2}\times h^2 \\ &= \frac{hv\Delta t}{4}\frac{Z(i+1,j)+Z(i-1,j)-2Z(i,j)}{h^2}\end{aligned} \quad \cdots(3)$$

で表される。(3)式を変形し

$$\frac{\Delta Z(i,j)}{\Delta t} = \frac{hv}{4}\frac{Z(i+1,j)+Z(i-1,j)-2Z(i,j)}{h^2}$$

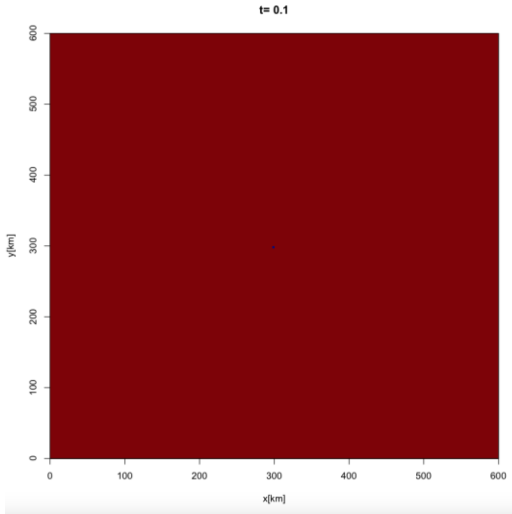
ここで拡散項と比較すると

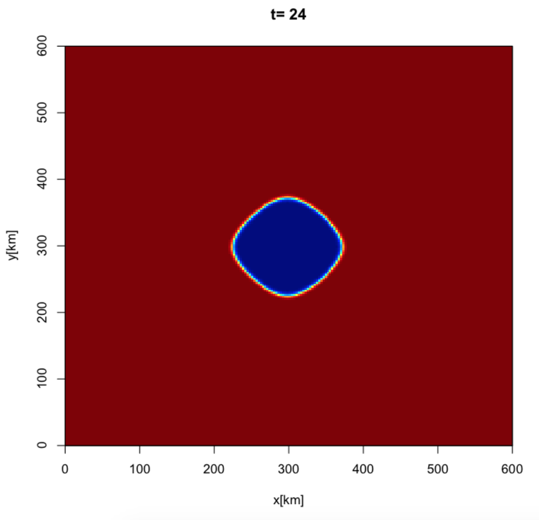
$$\frac{\partial u}{\partial t} = D\nabla^2 u$$

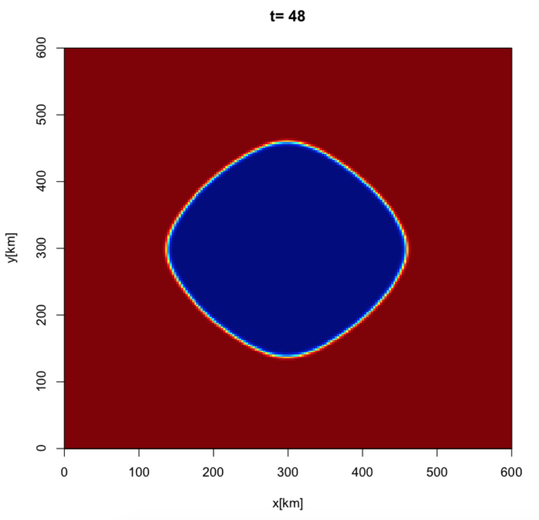
ΔZ(i, j)の右辺における hv/4 以降の項が Z の二回微分となっているので、拡散項の∇^2uにあたり、hv/4 が拡散係数 D となる。よって

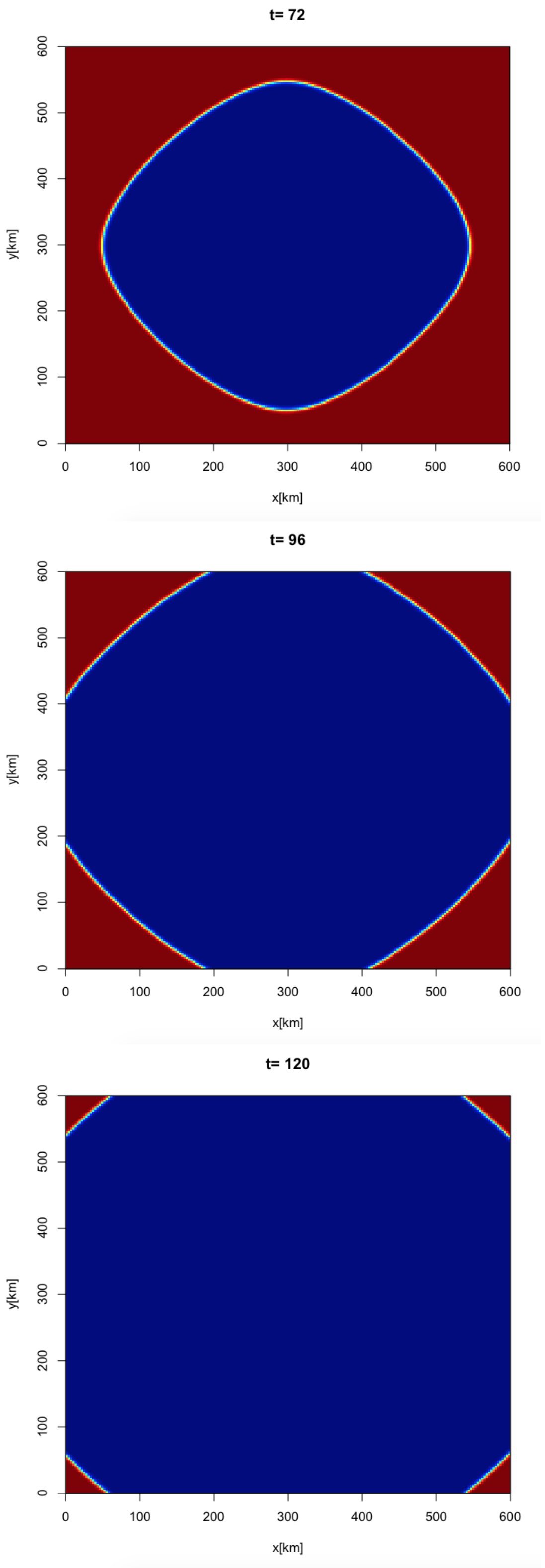
$$D = \frac{hv}{4}$$

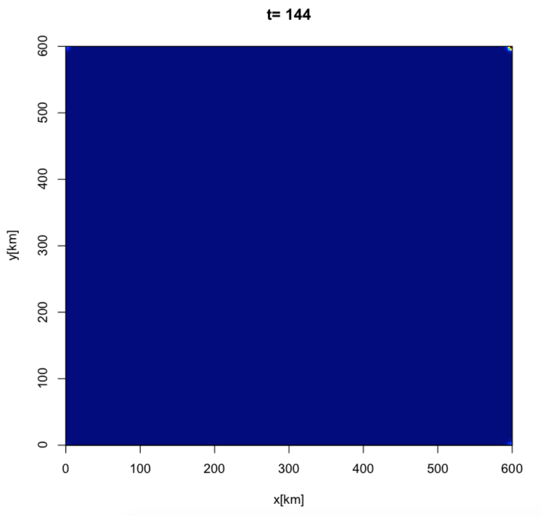
これらの条件でシミュレーションを行った結果をいかに記す。











<図.9>ゾンビ感染の様子
(t=1,24,48,72,96.120,144[h])

＊参考文献

[1] P.Munz, I. Hudea, J.Imad and R.J.Smith, When zombies attack !: Mathematical modeling of an outbreak of zombie infection, Infect. Dis. Model. Res. Prog. 4,133(2009).

[2] A. A. Alemi, M. Bierbaum, C. R. Myers, J. P. Sethna, You Can Run, You Can Hide: The Epidemiology and Statistical Mechanics of Zombies,Phys. Rev. E 92, 052801 (2015).

[3]Caitlyn Witkowski and Brian Blais. Bayesian analysis of epidemics-zombies, in uenza, and other diseases. arXiv preprint arXiv:1311.6376 (2013).