Benard-Rayleigh convection の数値シミュレーション

SP12133　非線形物理学研究室　徳永菜穂子

1. はじめに

気象学者の E.Lorenz は 1972 年の講演 " Predictability: Does the Flap of a Butterfly's Wings in Brazil Set Off a Tornado in Texas?" においてバタフライ効果を論じた。彼はカオスでの初期値鋭敏性を論じ、気象予報においても初期値に観測誤差があるなら、長期予報は不可能であると論じたものである。その研究の発端となったのは、大気のレイリー対流のモデルであった（下図参照)。ナビエ・ストークス方程式と熱伝導方程式を組み合わせ

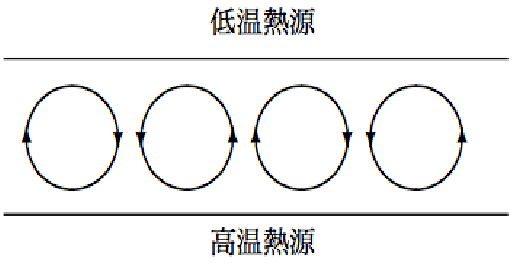

Fig.1: ベナール・レイリー対流

た系を出発点とし、容器の底を熱したとき容器内の暖められた流体は軽くなることで対流が起きるが、容器の底の温度と上部の温度差が大きくなり、あるしきい値を超えると対流パターンがくずれて乱流の状態に変化する。この状態の変化を、3 変数のダイナミックスとして抽出したものがローレンツ方程式である。

$$\begin{aligned}\frac{dX}{dt} &= -\sigma X + \sigma Y \\ \frac{dY}{dt} &= -XZ + rX - Y \\ \frac{dZ}{dt} &= XY - bZ \end{aligned} \quad (1)$$

この方程式を数値積分することで、初期値鋭敏性、バタフライ型の軌道、そしてパイこね変換という離散力学系でランダムネスを生むプロセスを見出すことにより、系の予測不可能性およびカオスを発見したのである [1]。本研究では、修士論文 [2] を参考にナビエ・ストークス方程式を数値積分し、レイリー対流から乱流に遷移する流体の状態の可視化を行う。レイリー対流での大きな渦が乱流状態に変化するとき、どのように壊れていくのかを研究する。

2. モデル方程式

非圧縮流体のナヴィエ・ストークス方程式と熱伝導方程式で記述される 2 次元系を考える。2 次元座標は (x, z) とし、z 座標が鉛直（上下）方向とする。幅は L, 高さは H とし、$x \in [0, L], z \in [0, H]$ で表すとする。流体の速度場を $\vec{v}(t, x, z) = (v_x(x, z, t), v_z(x, z, t))$、温度場を $T(x, z, t)$、圧力場を $P(x, z, t)$ で表すとする。流体に作用する体積力を $\vec{f}(x, z, t) = (0, f_z(x, z, t))$ と書く。流体の密度 ρ は定数、単位質量に対する定積熱容量を c_v, 熱伝導率 λ, 動粘性率 ν, 重力加速度 g、熱膨張率 α とする。熱伝導の方程式は

$$\partial_t T + \vec{v} \cdot \nabla T = \frac{\lambda}{C_v \rho} \Delta T = \kappa \Delta T$$

ここで、$\kappa = \lambda / c_v \rho$ は熱拡散係数,Δ は 2 次元ラプラス作用素、∇ はナブラ（勾配）である。また、運動量保存則に対応するナヴィエ・ストークス方程式は、

$$\partial_t \vec{v} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} = \nu \Delta \vec{v} - \frac{1}{\rho} \nabla P + \frac{1}{\rho} \vec{f}$$

である。体積力 $\vec{f}$ は、密度 ρ の流体に働く重力と温度 T で αT だけ膨張することを取り入れて、鉛直方向 z のみの成分だけ値を持つとする。

$$\vec{f} = (0, -\rho g(1 - \alpha T)).$$

非圧縮性の過程から、速度場 $\vec{v}$ は $\nabla \cdot \vec{v} = 0$ の条件を満たし、圧力場 P の時間変化は $\nabla \cdot \vec{v} = 0$ となるように決まるとする [3]。境界条件は、容器の上部 $z = H$ の温度を 0、下部 $z = 0$ の温度を T とし、速度場については容器表面で静止しているとする（粘着条件)。また、x 方向は周期境界条件を課す。

$$\begin{aligned} T(x, 0, t) = T, T(x, H, t) = 0, T(0, z, t) = T(L, z, t), \\ \vec{v}(x, 0, t) = \vec{v}(x, H, t) = \vec{0}, \vec{v}(0, z, t) = \vec{v}(L, z, t). \end{aligned}$$

T が十分小さい時、底面の熱が流体を伝導して上部に伝わり対流もおきない。この静止状態を $\vec{v} = \vec{0}, T_0, P_0$ で表すとすると、上記の方程式の定常状態として

$$T_0 = T(1 - \frac{z}{H}) \;,\; P_0 = \mathrm{Const.} - \rho g(z - \alpha T(z - z^2/2H))$$

と求めることができる。この定常状態からのズレを θ, π で表す。

$$T = T_0 + \theta \;,\; P = P_0 + \pi$$

すると、$\vec{v}, \theta, \pi$ に対する熱伝導＋ナヴィエ・ストークス方程式は

$$\begin{aligned} \partial_t \vec{v} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} &= \nu \Delta \vec{v} - \frac{1}{\rho} \nabla \pi + g \alpha \theta \cdot \vec{e}_z \\ \partial_t \theta + \vec{v} \cdot \nabla \theta &= \kappa \Delta \theta + \frac{T}{H} v_z \\ \nabla \cdot \vec{v} &= 0 \end{aligned}$$

となる。ここで、$\vec{e}_z$ は z 方向の単位ベクトルである。圧力場 π は $\nabla \cdot \vec{v} = 0$ を満たすように更新を行うとする [3]。卒業研究では、この連立偏微分方程式を数値的に解くプログラムを開発し対流から乱流に変化する様子をシミュレートした。

参考文献

[1] E.N.Lorenz,Deterministic Nonperiodic Flow, J.Atmos.Sci.20,130(1963).

[2] 浅子敬大, レイリー対流の数値計算とローレンツ・カオス, 北里大学大学院理学研究科（平成 24 年度修士論文）.

[3] 梶島岳夫, 乱流の数値シミュレーション　改訂版，養賢堂.