

# Statistics of N-Rivers Meander

北里大学理学部 分子物理学講座 入山 裕左

メアンダーの自然な拡張として、Nリヴァーメアンダーを導入して、計算機を用いて解析した。川の数  $N$  として、 $N$  が  $1 \leq N \leq 5$  の橋  $2n$  と道の数  $k$  の時の自己交叉のない場合の数のテーブルを作成した。

## 1 メアンダーの定義とこれまでの結果

メアンダーとは、長さが  $\infty$  の川に  $2n$  個の橋が架かっている時、それを  $k$  本の道路で結ぶ自己交叉しない場合の数である。

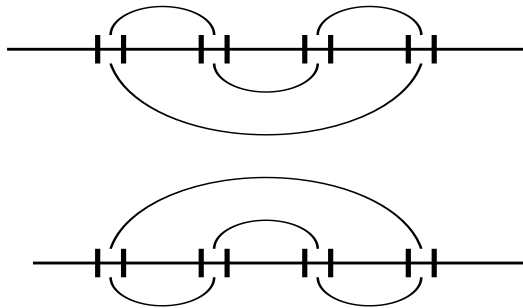


図 1:

図 1 には、橋が 4 本の場合のメアンダーが書かれている。例えば道が 1 本の時は、2 種類のメアンダーが存在し、道が 2 本の時も 2 種類ある。この種類の数をメアンダー数と言い、橋が  $2n$  本で道が  $k$  本の場合を  $M_n^k$  とかく。これは閉じた切手のコンパクト化の問題に対応している。

例えば図 2 の左側には、橋が 4 本で道の数が 1 本の場合のメアンダーが書かれている。それを、左右から押しつぶしたとき図の右側に書かれている様な 4 枚の閉じたひと連なりの切手をコンパクトに折りたたんだ状態に対応している。

同様にしてセミメアンダーとは 1 つの池を出発点とした長さが半  $\infty$  の川に  $n$  個の橋が架かっている、それを  $k$  本の道路で結ぶ自己交叉しない場合の数である。例えば図 3 の様に、橋の数が

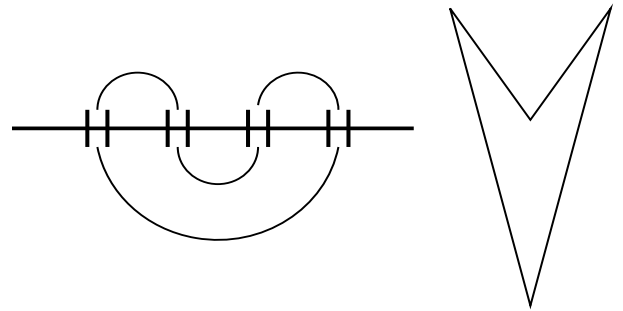


図 2:

3 本で道が 1 本の時は、2 種類のセミメアンダーが存在し、道が 2 本の時も 2 種類あり、道が 3 本のときは、1 種類ある。この種類の数をセミメアンダー数と言い、橋が  $n$  本で道が  $k$  本の場合を  $SM_n^k$  とかく。

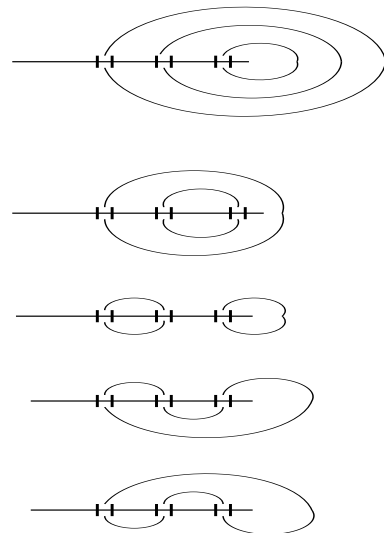


図 3:

これは開いた切手のコンパクト化の問題に対応している。

これまでの研究より、メアンダー問題について、以下の様な結果が知られている。

Semi-Meander (or 1-River Meander)

表 1: The numbers  $SM_n^k$  of inequivalent semi-meanders of order  $n$  with  $k$  connected components for  $1 \leq n \leq 8$ , obtained by exact enumeration on the computer.

$k \setminus n$	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	1	2	4	10	24	66	174
2	0	1	2	6	16	48	140	428
3	0	0	1	3	11	37	126	430
4	0	0	0	1	4	17	66	254
5	0	0	0	0	1	5	24	104
6	0	0	0	0	0	1	6	32
7	0	0	0	0	0	0	1	7
8	0	0	0	0	0	0	0	1

表 1, 表 2 はこれまでの研究により知られているセミメアンダー数、メアンダー数を書いたものである。縦軸には道の数、横軸には橋のペアの数が書かれている。

Meander (or 2-River Meander)

表 2: The numbers  $M_n^k$  of inequivalent meanders of order  $n$  with  $k$  connected components for  $1 \leq n \leq 7$ , obtained by exact enumeration on the computer.

$k \setminus n$	1	2	3	4	5	6	7
1	1	2	8	42	262	1828	13820
2	0	2	12	84	640	5236	45164
3	0	0	5	56	580	5894	60312
4	0	0	0	14	240	3344	42840
5	0	0	0	0	42	990	17472
6	0	0	0	0	0	132	4004
7	0	0	0	0	0	0	429

表 2 の  $n=k$  の欄に並ぶ値をカタラン数  $C_n$  と呼ぶ。表 1 を見てみると各列をたし合わせたものがカタラン数になっている。また表 2 ではカ

タラン数の 2 乗が各列をたし合わせたものになる。例えば上の表で、 $n=3$  の列の和は、

$$8 + 12 + 5 = 25$$

この時、カタラン数は 5 である。2 乗すると

$$5^2 = 25$$

となる。

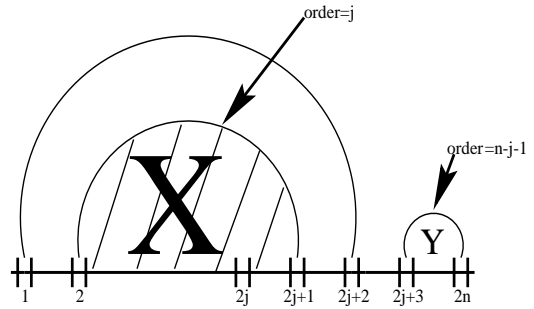


図 4:

また一般式は、図 4 から求められる式 1, 式 2 によって与えられ、カタラン数とは、アーチの種類である。この漸化式は次のようにして得られる。まず、左端のアーチの始点がどの橋につながっているかで場合分けする。すると内側には  $order=j$  の任意のアーチが入り、外側には  $order=n-j-1$  の任意のアーチができる。 $order=n$  のアーチは、上記の場合をたし合わせたものであり数式 1 はそれを表わしている。これを解くと次の数式 2 が得られる。

$$c_n = \sum_{j=0}^{n-1} c_j c_{n-j-1} \quad (1)$$

$(c_0 = 1)$

$$c_n = \frac{1}{2n+1} \binom{2n+1}{n} = \frac{2n!}{n!(n+1)!} \quad (2)$$

セクション 2 ではメアンダーの自然な拡張としての N リヴァーメアンダーを導入し、その定義と数値計算のアルゴリズムを理解する。セクション 3 では、N リヴァーメアンダーのテーブルを示し、最後にそのエントロピーについて議論して本論文を終える。

## 2 Nリヴァーマエアンダーの定義と数値計算のアルゴリズム

この節では、まずメアンダー問題の拡張としてのNリヴァーマエアンダーを導入する。図5を見てみよう。

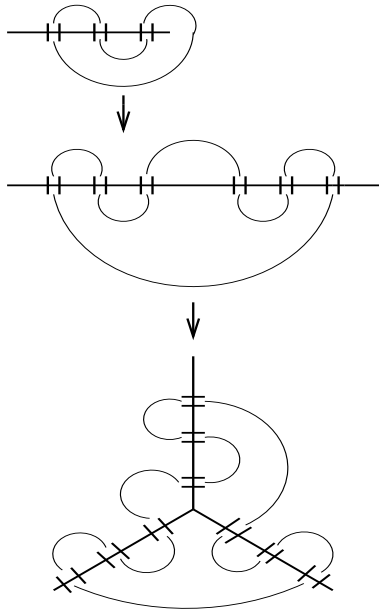


図 5:

まず、セミメアンダーは、溜池から半無限の川が流れているものである。次にメアンダーは、無限の川があってそこに  $2n$  個の橋が架かっているものであるが、セミメアンダーを参考に溜池から  $n$  個の橋を持った2本の半無限の川が流れていると考えてもいいであろう。そうすると、Nリヴァーマエアンダーは、溜池から  $n$  個の橋を持った半無限の川が  $N$  本流れている場合の橋の結びかたを数え上げる問題として定式化できる。次に、メアンダーの構成方法について説明する。最初、 $2n$  個の橋を自己交叉条件を無視してあらゆる結び方を数え上げその中で自己交叉しないものを数えあげた。しかし橋の数を増やしていくと、メアンダーの判定に時間がかかりすぎて結果が得られない。かつ道の数を増やすことも困難になる。そこで、川の数や道の数が増やしても対応できるようにアーチからメアンダーを構成し、そのメアンダー中の道の数进行計算する方法をとった。まずアーチの構成法を説明する。図6を見てみよう。

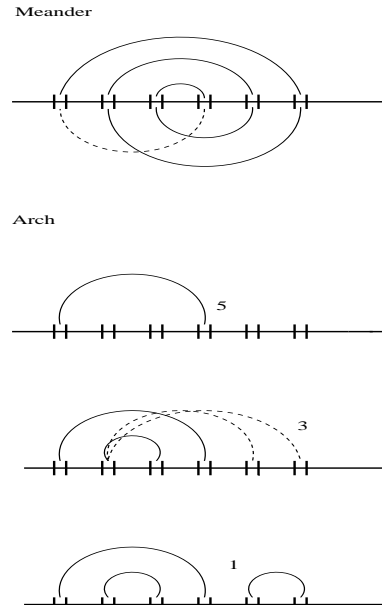


図 6:

メアンダーの場合は図6を見て解るように、順番に上下のアーチを区別しないで汲 20 通りを考える。アーチを構成する場合は、アーチの始点をまだ選んでない橋の一番左端に決めてそれとペアになる終点をきめる。次に考えるアーチは残った橋のペアを考えるので、全部で 15 通りを考えればよく、時間は短縮される。

次にアーチからメアンダーを構成する方法について説明する。まず図7を見てみよう。

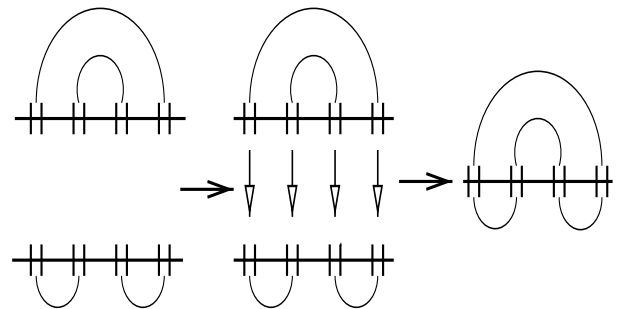


図 7:

川を上と下の領域にわけて、上下にアーチをつくる。橋に番号をつけて、上下の同じ番号の橋を通る道をつないで上と下のアーチを組み合わせメアンダーをつくる。すべてのアーチの種類についてこの組み合わせを行いメアンダーの数をかぞえる。川の数が増えたときも、図7の様な、川が1本の時を一つの領域と考えて、いくつ

かの領域の組み合わせで場合の数を数えていった。すると図 8 の様になる。

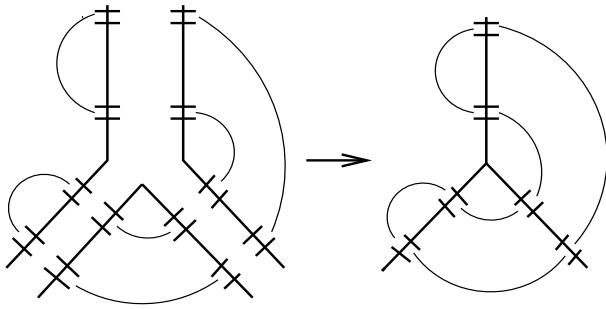


図 8:

同様にして 3 種類のアーチを図の様に組み合わせることによって 3 リヴァーメアンダーが構成できる。N リヴァーメアンダーも同様である。このことから N リヴァーメアンダーの各列の和がカタラン数の N 乗になっていることがわかる。セミメアンダーについては、図をみるとわかるようにアーチを変形することにより得られるので各列の和はカタラン数の 1 乗になっている。

### 3 N リヴァーメアンダーの数値計算の結果とエントロピー

N リヴァーメアンダーの数値計算の結果は以下の通りである。

各列の和はカタラン数の N 乗になっている。すでにメアンダー、セミメアンダーにおいて橋の数を増やしていくとその数は以下のようになることが知られている。

$$M_n \sim (12.27)^n / n^{\frac{7}{2}} \quad (3)$$

$$SM_n \sim (3.5)^n / n^2 \quad (4)$$

エントロピーの指標を次の様に定義する。S(メアンダーのエントロピー)、SM(セミメアンダーのエントロピー)として

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log M_n \quad (5)$$

すると、メアンダーに対して

$$\log 12.27 \sim 2.5 \quad (6)$$

表 3: The numbers  $T_n^k$  of inequivalent Three-river meanders of order  $n$  with  $k$  connected components for  $1 \leq n \leq 6$ , obtained by exact enumeration on the computer.

k \ n	1	2	3	4	5	6
1	1	3	26	318	5362	100230
2	0	4	54	895	18060	399080
3	0	1	37	94	24645	672006
4	0	0	8	469	17536	625673
5	0	0	0	105	6916	352172
6	0	0	0	8	1444	122387
7	0	0	0	0	125	25451
8	0	0	0	0	0	2844
9	0	0	0	0	0	125
10	0	0	0	0	0	6

表 4: The numbers  $Q_n^k$  of inequivalent four-river meanders of order  $n$  with  $k$  connected components for  $1 \leq n \leq 6$ , obtained by exact enumeration on the computer.

k \ n	1	2	3	4	5	6
1	1	4	80	2124	101470	4851896
2	0	7	216	7934	442064	25188440
3	0	4	217	12180	826724	58121548
4	0	1	96	9951	869904	78747694
5	0	0	16	4696	565993	69661832
6	0	0	0	1307	234672	42292975
7	0	0	0	208	61044	18017660
8	0	0	0	16	9200	5408611
9	0	0	0	0	625	1130852
10	0	0	0	0	0	159543
11	0	0	0	0	0	14100
12	0	0	0	0	0	625

表 5: The numbers  $P_n^k$  of inequivalent five-river meanders of order  $n$  with  $k$  connected components for  $1 \leq n \leq 5$ , obtained by exact enumeration on the computer.

k \ n	1	2	3	4	5
1	1	5	242	13280	1863730
2	0	11	810	62414	10032580
3	0	10	1081	127410	23993031
4	0	5	720	148646	33644540
5	0	1	240	109854	30718771
6	0	0	32	53910	19145676
7	0	0	0	17848	8281250
8	0	0	0	3910	2465304
9	0	0	0	520	485725
10	0	0	0	32	57500
11	0	0	0	0	3215

表 6: The numbers  $H_n^k$  of inequivalent six-river meanders of order  $n$  with  $k$  connected components for  $1 \leq n \leq 5$ , obtained by exact enumeration on the computer.

k \ n	1	2	3	4	5
1	1	6	728	79686	33823582
2	0	16	2916	453030	217504920
3	0	20	4861	1160616	635064270
4	0	15	4320	1773427	1114822432
5	0	6	2160	1801836	1312573744
6	0	1	576	1283577	1094991944
7	0	0	64	657420	663286510
8	0	0	0	243258	295445808
9	0	0	0	63962	96203023
10	0	0	0	11412	22395736
11	0	0	0	1248	3549150
12	0	0	0	64	345000
13	0	0	0	0	15625

になり、セミメアンダーに対して

$$SM = 1.25 \quad (7)$$

になる。この指数を N リヴァーメアンダーに対しても評価した。

$$S(3) = 3.75 \quad (8)$$

$$S(4) = 5.0 \quad (9)$$

$$S(n) = 1.25n \quad (10)$$

図 9 を見てみよう。すると、N リヴァーメアン

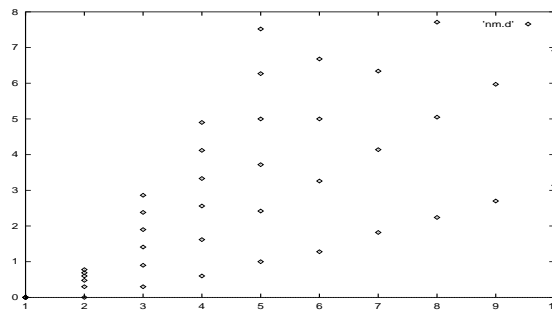


図 9:

ダーのエントロピーの指数  $S_N$  は、 $S_N = N * SM$  になっている。

謝辞

最後に本論文に取り組むにあたって、有用な議論とアイデアを提供してくれ、またプログラム作成や文書作成の際、夜中までつきあっていただいた守先生に大変感謝する。また論文作成において、多大な協力をして下さった菊池先生にも、感謝する。

## 参考文献

- [1] S.Lando and A.Zvonkin, Plane and Projective Meanders, Theor.Comp.Sci.117(1993)227 and Meanders, Selecta Math.Sov. 11(1992)117.
- [2] Ph.Di Francesco, O.Golinelli and E.Guitter, Meander, Folding and Arch Statistics, SPhT/95-059.