デリバティブ（金融派生商品）のプライシングについて

分子物理学研究室　SP95116　小宮山 智之

株式の派生証券の価格式について、特にヨーロピアン・オプションの理論価格式であるブラック・ショールズ式について解説した。またこの式を現在と過去の実際の銘柄に適合し、プレミアムを求め考察を行なった。

1　株式オプション

株式の派生商品とは、株価によって価値が決まる証券であり、株式オプションや株式の先物契約などがある。

株式オプションとは、ある決められた日（”**満期日**”）（まで）に決められた価格（”**権利行使価格**”）で株式を購入または売却できる「権利」の事であり、株式を購入するものを コール・オプション、売却するものをプット・オプションと呼び、満期日にのみ行使できるヨーロピアンタイプと、満期日までならいつでも行使できるアメリカンタイプがある。

2　株価変動の数理モデルによる仮定

派生証券の価格式を導くために、株価の変動が次の確率過程に従うと仮定した。

$$\mathrm{d}S = \mu S \mathrm{d}t + \sigma S \mathrm{d}z \tag{1}$$

S : 株価,　μ : 期待収益率,　σ : ボラティリティ

この式は、株価の増加幅は株価に比例して大きくなり、また株価の変動幅も株価に比例する事を意味する。この時、μ と σ がそれぞれの比例定数になっている。

株価が（1）式の確率過程に従うなら、伊藤のレンマ

$$\mathrm{d}f = \left(\frac{\partial f}{\partial S}\mu S + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2\right)\mathrm{d}t + \frac{\partial f}{\partial S}\sigma S \mathrm{d}z \tag{2}$$

より、株価の対数が従う過程は（3）式の様になる。

$$\mathrm{d}\ln S = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\mathrm{d}t + \sigma \mathrm{d}z \tag{3}$$

（3）式はまた、株価が対数正規分布に従う事を意味する。この式は、株価の対数 $\ln S$ が一定率 $\mu - \sigma^2/2$ で上昇する直線を中心に、分散 σ^2 の正規分布に従って分布するというものである。

3　ブラック・ショールズ式によるオプションの価格式

満期時点 T におけるヨーロピアン・コール・オプションの価値は、満期での株価を $S(T)$, 権利行使価格を X とおけば、

$$\text{コールオプションの価値} = \max\Big(S(T) - X, 0\Big) \tag{4}$$

となるが、この式について（3）式が示す分布に従って期待値を求め、非危険利子率 r で現在価値に割り引けば、オプション価格式であるブラック・ショールズ式

$$c = S(t)\cdot N(d_1) - X\cdot e^{-r(T-t)}\cdot N(d_2) \tag{5}$$

が求められる。ただし、

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{\ln\frac{S(t)}{X} + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \\ d_2 &= d_1 - \sigma\sqrt{T-t} \\ N(d) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{d} e^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x \end{aligned}$$

$N(d)$ は標準正規分布の累積確率密度関数である。

（5）式を実際の銘柄に当てはめてコール・オプションのプレミアムを求めると次のとおりとなった。

住友不動産	78 年	88 年	98 年
株価	300	1340	255
行使価格	290	1330	245
ボラティリティ	0.0374	0.0284	0.0952
プレミアム	13	26	15

ここでは、住友不動産の現在と 10 年前、20 年前の株価をもとにそれぞれの年のヨーロピアン・コール・オプションのプレミアムを求めた。ただし、満期までのオプションの期間を 6ヶ月、非危険利子率を年率２％とした。株価はある日の終値を用い、その値に対し適当に行使価格を定めた。またボラティリティは連続した 15 日間の株価の値より求めている。

表より、バブルに入る頃の 88 年は株価からも他の 2 つの年より景気が良い事がうかがえる。また、98 年はボラティリティが他の年より高い値を示しているが、これは住友不動産の経営が不安定なため株の取り引きが活発であり、株価が大きく変動していたためと考えられる。

ボラティリティが高いとオプションのプレミアムも高くなる。それは、株価の変動による利益はそのまま得られるのに対し、損失がある場合でもプレミアム分だけに抑える事ができるためである。つまりボラティリティが高ければ、オプションによるリスクヘッジ（リスクの回避）の価値が高まるのでプレミアムが高くなるのである。この事は、（5）式において σ（ボラティリティ）の増大が $N(d_1)$ の増大と $N(d_2)$ の減少につながり、プレミアム c の値が大きくなる事からも分かる。