株式市場のモデル

非線形物理学教室 SP95112 景山 和俊

目的

株式市場における価格の変動のモデルについての解説とその問題点に付いての考察を行う。

株式の価格はマルコフ過程に従うと考えることが多い。マルコフ過程の一つのウィナー過程を用いると

$$\frac{dP}{P} = \mu dt + \sigma\varepsilon\sqrt{dt} \tag{1}$$

と表される。ここでPは株価、tは時間、εは標準正規分布からの無作為抽出、σはボラティリティ（株価の変動の不確実性の度合い）、μは期待収益率である。このモデルでは、収益はガウス分布になる。また、マルコフ過程であるので価格の変動は過去の値動きによらない。一方、株式市場での値段の動きは一見ランダムに動いているようにも見えるが、実際の株式市場を見てみると株価の変動の分布はレヴィ分布になっている。また、価格の変動は過去の価格の変動と関係があり、ロングメモリーとしてしられている。そこでこれらの性質を再現するモデルを考える。

モデル

株式市場のモデルとしては高安モデルや久門モデルが知られている。まず、N人のトレーダーを導入し、トレーダー同士の間で取引が起き値段が付いていく事にする。全てのトレーダーがそれぞれの望む売値S_iと買値B_iを全てのトレーダーに対し示す。S_iとB_iの間隔Lは一定とする。その示された値段の中で一番高い買値B_jをつけたものと、一番安い売値S_iを付けたものとの間で取引が起き、（但し、$S_i > B_j$の時）その値段$P(t)$は$(S_i + B_j)/2$になるとする。そして取引の成立の後には、トレーダーがまた新たに値段をつけ再び取引を起こす。これを繰り返していく。高安モデルでは、株を持っているトレーダーは必ず売りのポジション、持っていないトレーダーは買いポジションを取る。j番目のトレーダーの示す買値B_jを次の式で決定する。

$$B_j(t) = B_j(t-1) + a_j + c(P(t) - P_{prev}) \tag{2}$$

ここでP_{prev}は以前の取引のあった時の株価で、cは定数。a_jは0から定数αの間でランダムに取って固定しその符合は、株を持っている場合は符合を負にし、持っていない場合は正のままとする。このモデルで$\alpha = 0.01$トレーダーの数Nを100としその半分の人間が株を持っているとして株価の変動の分布を見ると$c = 0$のときにはガウス分布になるが、c=0.2でレヴィ分布となった。(図1参照) しかし、このモデルでは株を持っているトレーダーは次に必ず売り、持っていないトレーダーは必ず売るので、空売りもできないし株を1単位しか持つことが出来ないと実際とは異なる部分もある 。そこで、久門モデルでは株の保有数に制限はなく、買値B_jを株の有無に係わらずにランダムに動かしている。

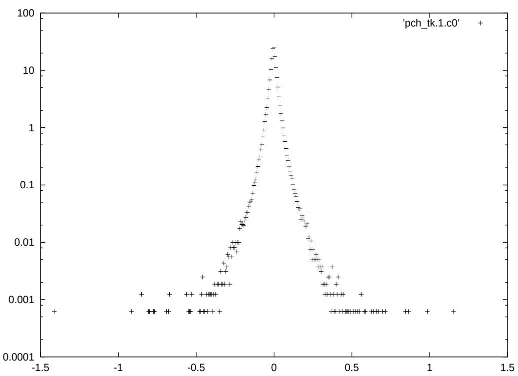

図 1: 株価の変動のヒストグラム 横軸：株価の変動の大きさ、縦軸：確率密度の対数

$$B_j(t) = B_j(t-1) + r(c \cdot |P(t) - P_{prev}| + \alpha) \tag{3}$$

ここで、rは(-1,1)の一様乱数、c,αは定数である。このモデルで$c = 3.0$,α=1.0として、次々と取り引きを起こさせると、株価の変動の分布はレヴィ分布となった。ロングメモリー等、更に性質も再現するか検証し、モデルの問題点に付いても議論している。